

6 月 22 日出題のレポートのコメント

よくできているとレポートには **よくできました** の判が押してあります。判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください。それでも不明な点は質問に来てください。

全体の注意 積分する範囲は問題にある確率密度関数をよく観察すること！そうすれば、わかるようになってはいるはずである。

問題 34 (i) 期待値の定義より

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x=-1,1} \sum_{y=-1,1} xy \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

となることに注意せよ。

(iii)

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)}, \quad y = -1, 1$$

と

$$\mathbb{E}[Y|1] = \sum_{y=-1,1} y f_{Y|X}(y|1)$$

である。

(v) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ または $\text{COV}[X, Y] = 0$ でも X と Y は 一般には独立とは限らない。独立を確認するためには、 $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ を確認すること。

問題 36 この問題は 積分範囲に注意をすること！(i) 期待値の定義から

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \left(\int_y^1 2xy \, dx \right) dy$$

であることに注意せよ。

(ii) $0 < x < 1$ に対して、 $f_{Y|X}(x,y)$ の y の動く範囲 に注意すること。

$$f_X(x) = \int_x^1 2 \, dy$$

に注意すればよい。

(vi)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(x) f_X(x) \, dx$$

となる .

問題 38 (iv)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)} = 4xy - 2x - 2y + 2$$

となるので , $0 < x < 1$ に対して ,

$$\mathbb{E}[Y|x] = \int_0^1 y f_{Y|X}(y|x) dy = \frac{1}{3}(x+1)$$

となる .

(v) 期待値の性質から

$$\mathbb{E}[\{(a+bX) - Y\}^2] = b^2\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - 2b\mathbb{E}[XY] + 2ab\mathbb{E}[X] - 2a\mathbb{E}[Y] + a^2 =: g(a, b)$$

となるようだ . あとは , a, b について $g(a, b)$ の最小化 (この場合は可能) をすればよい . たとえば , $g(a, b)$ を b について平方完成するのとよい . また ,

$$\frac{\partial}{\partial a} g(a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} g(a, b) = 0,$$

が極値を求めるときの必要条件であることを思い出すとよい .