2005 年 7 月 06 日（今野）

6 月 29 日出題のレポートのコメント

よくできているとレポートには $\boxed{\text{よくできました}}$ の判が押してあります．判のないレポートは下記を参考にして考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

$\boxed{\text{全体の注意}}$

- 積分する範囲は，問題にある確率密度関数から積分に必要な領域をきちんと描いて，それを見ながら積分の範囲を考えてください．
- 2 重積分を累次積分に帰着される議論は「初歩から学べる微積分学」の page 214 ～ 216 を参照のこと．
- 無限に広がる図形での広義積分の意味と例については「初歩から学べる微積分学」の page 232 を参照のこと．
- $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ のとき，

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

となるが，極限 $\lim_{b\to\infty} F(b)$ の収束（先）が明らかな場合には，形式的に

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_a^{\infty}$$

としてもよいことにする．ただし，広義積分の意味はきちんと理解しておくこと．

- (iii) と (iv) の積分の計算はやや面倒かもしれない．
- 講義で述べた概念を正しく理解しているかが一番大切である．したがって，どのようなことをしなければならないかが重要である．具体的な計算のやり方がわからないと正しい答えには到達しないが，どのような計算がしなければならないかの方針を理解することが大切です．

$\boxed{\text{問題 42}}$ (i) $X$ と $Y$ が独立同一に指数分布に従うという仮定から，直ちに $X$ と $Y$ の同時確率密度関数は

$$f_{X,Y}(x,\,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x>0,\,y>0), \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

となることに注意する．つぎに，

$$\begin{cases} v = x+y, \\ u = y, \end{cases} \iff \begin{cases} x = v-u, \\ y = u, \end{cases}$$

と $\{(x,\, y) :\, f_{X,Y}(x,\, y) > 0\} = (0,\, \infty) \times (0,\, \infty)$ となるので，

$$\begin{cases} 0 < x = v - u < \infty, \\ 0 < y = u < \infty \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u < v < \infty, \\ 0 < u < \infty \end{cases}$$

となる．確率密度関数の変換公式から

$$f_{U,V}(u,\, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(v-u,\, u)|J|, & (0 < u < \infty,\, u < v < \infty), \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\int_0^\infty \left( \int_0^v f_{U,V}(u,\, v)\, du \right) dv = 1$$

を確認すればよい．上の積分の順序を交換するとどのようになるかを考えてみるとよい．

(ii)

$$f_V(v) = \begin{cases} \int_0^v f_{U,V}(u,\, v)\, du,, & (0 < v < \infty), \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\int_0^\infty f_V(v)\, dv = 1$$

を示せばよい．

(iii)

$$\begin{cases} w = \frac{x}{y}, \\ y = y, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = yw, \\ y = y, \end{cases}$$

と $\{(x,\, y) :\, f_{X,Y}(x,\, y) > 0\} = (0,\, \infty) \times (0,\, \infty)$ となるので，

$$\begin{cases} 0 < x = yw < \infty, \\ 0 < y < \infty \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < w < \infty, \\ 0 < y < \infty \end{cases}$$

となることに注意する．さらに，ヤコビアン行列式の絶対値は

$$|J| = |y|$$

となる．ただし，

$$\{(w,\, y) :\, f_{W,Y}(w,\, y) > 0\} = (0,\, \infty) \times (0,\, \infty)$$

となるので，

$$f_{W,Y}(w,\, y) = \begin{cases} f_{X,Y}(wy,\, y)y, & (0 < w,\, y < \infty), \\ 0, & \text{その他}, \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f_{W,Y}(w,\,y)\,dw\,dy = 1$$

を確認すればよい．

(iv) $W$ の周辺確率密度関数は

$$f_W(w) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{W,Y}(w,\,y)\,dy, & (0 < w < \infty), \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となる．また，

$$\int_0^\infty f_W(w)\,dw = 1$$

を確認すればよい．