

統計解析演習の問題 (その 1)

問題 1 ジョーカーを除く 52 枚のトランプからカードを 1 枚無作為に抜取る試行をし、組み札に注目するとする：クラブ (C), ダイヤ (D), ハート (H), スペード (S) . したがって、標本空間は

$$\Omega = \{C, D, H, S\}$$

である．事象 A, B を

$$A = \{C, D\}, \quad B = \{D, H, S\}$$

としたとき、つぎの事象を求めよ．

- (1) $A \cup B$
- (2) $A \cap B$
- (3) A^c

問題 2 分配法則とド・モルガンの法則を示せ．

ヒント : $A \subset B \iff$ 任意の $\omega \in A$ に対し $\omega \in B$
 $A = B \iff A \subset B$ かつ $B \subset A$

問題 3 つぎの等式を示せ．このとき、

- (1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- (2) $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

ヒント : 事象 A に含まれる根元事象であって事象 B には含まれないものの全体のつくる事象を、 A, B の差といい、 $A \setminus B$ と記すことにする：

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ かつ } \omega \notin B\}$$

問題 4 $a, b \in \mathbb{R} (a < b)$ とする． $\mathbb{R}$ の部分集合に関するつぎの等式を確かめよ．

- (1) $\cap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b] = [a, b]$
- (2) $\cup_{n=1}^{\infty} (a, b - 1/n] = (a, b)$
- (3) $\cap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, a] = \{a\}$
- (4) $\cup_{n=1}^{\infty} (-n, a] = (-\infty, a]$
- (5) $\cup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n + 1] = \mathbb{R}$

ヒント : (1) の等式については , (左辺) $\subset$ (右辺) は明らか . (左辺) $\supset$ (右辺) を示すためには , 対偶をとり , $x \notin [a, b]$ ならば , $x \notin$ (右辺) を言えばよい .

問題 5 $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする .

- (1) $A, B \in \mathcal{F}$ のとき , $A \cap B \in \mathcal{F}$ と $A \setminus B \in \mathcal{F}$ を示せ .
- (2) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ のとき , $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ を示せ .

ヒント : $\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\}^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ を利用せよ .

問題 6 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする . 確率の性質 (i) – (v) を示せ .

問題 7 事象 A, B が互いに独立のとき , つぎの対も互いに独立であることを示せ .

- (1) A^c, B^c
- (2) A, B^c
- (3) A^c, B

ヒント : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を用いて , たとえば , 確率の性質 (iii) と (v) を利用して $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ を示せばよい . 計算は右辺から始めた方が見通しがいいようだ .

問題 8 サイコロを 2 つ投げる試行を考える . したがって , 標本空間は

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

である . つぎの事象を考えよう .

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \\ B &= \{\text{ふたつのサイコロの和が 7 以上 10 以下}\} \\ C &= \{\text{ふたつのサイコロの和が 2 または 7 または 8}\} \end{aligned}$$

- (1) $P(A) = 1/6, P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$ を確認せよ .
- (2) $A \cap B \cap C$ を求め , $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ を示せ .
- (3) $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ と $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ を確認せよ .

問題 9 標本空間 Ω を 3 つの字 a, b, c を並べたものとする .

$$\Omega = \{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab, \}$$

ここからどのならびが出現する確率も $1/9$ であるとし , 事象 $A_i, i = 1, 2, 3,$ を

$$A_i = \{\text{字の並びの } i \text{ 番目の字が } a\}$$

とする .

- (1) 事象 A_1, A_2, A_3 を求め , $P(A_i) = 1/3$ を確認せよ .
- (2) A_1, A_2, A_3 は対独立であることを示せ .
- (3) A_1, A_2, A_3 は独立でないことを確かめよ .