統計解析・演習の試験問題（試験時間は 110 分）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めていない場合には証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) どの問題を解答しているかが明示されていれば，解答は問題番号順でなくともよい．

答案は後期開講の「情報統計学」の第 1 回目の講義で返却をする．受講しないものは研究室まで取りに来てください．

問題 1　連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (0 < x < 2), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(a) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$（$x \in \mathbb{R}$）と X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．ただし，$F_X(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．

(b) $Y = -2\log X + 2\log 2$ としたとき，Y の分布関数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y)$（$y \in \mathbb{R}$）と確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．ただし，$F_Y(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．また，$f_Y(y) > 0$ となる y の範囲を明示すること．

(c) Y の期待値 $\mathbb{E}[Y]$ を求めよ．

ヒント　以下は既知としてよい．　$\frac{d}{dx}\{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\} = x\log x$,　$\frac{d}{dx}\{-xe^{-x} - e^{-x}\} = xe^{-x}$,　$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$,　$\lim_{x\to 0} x^2\log x = 0$.

解答と配点　(a) 10 (b) 10 (c) 5 計 25

(a) $x \in (0, 2)$ に対して，

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\,dx = \frac{x}{2}$$

となる．明らかに，$x \le 0$ に対しては $F_X(x) = 0$，$x \ge 2$ に対しては $F_X(x) = 1$ となる．したがって，

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ \dfrac{x}{2} & (0 < x < 2), \\ 1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

となる．

期待値の定義と与えられた確率密度関数の台より

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx = 1$$

となる．

(b) $\mathbb{P}(0 < X < 2) = 1$ より $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$ となる．このことより任意の $y \le 0$ に対して，$\mathbb{P}(Y \le y) = 0$ がわかる．任意の $y > 0$ に対して

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(-2\log X + 2\log 2 \le y) = \mathbb{P}(-2\log(X/2) \le y) = \mathbb{P}(X \ge 2e^{-y/2})$$

となる．X は連続型確率変数なので，$\mathbb{P}(X = 2e^{-y/2}) = 0$ と確率の性質（事象 B に対して，$\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B)$）より

$$\mathbb{P}(X \ge 2e^{-y/2}) = 1 - \mathbb{P}(X \le 2e^{-y/2}) = 1 - e^{-y/2}$$

となる．最後の等号は $0 < e^{-y/2} < 1$ と X の分布関数の形よりわかる．したがって，

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y \le 0), \\ 1 - e^{-y/2} & (0 < y < \infty), \end{cases}$$

を得る．

$y > 0$ に対して，Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

となることがわかる．よって，

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2} & (y > 0), \\ 0 & (y \le 0), \end{cases}$$

(c) Y の確率密度関数の台から Y の期待値は

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty y\,\frac{1}{2}e^{-y/2}\,dy = 2\int_0^\infty ze^{-z}\,dz = 2\bigl[-ze^{-z} - e^{-z}\bigr]_0^\infty = 2$$

となる．

問題 2　離散型確率変数 X, Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ は下の表のように与えられているとする．

$y \backslash x$	1	2	3
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
4	0	$\frac{1}{3}$	0

(a) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．ただし，答えのみでよい．

(b) Y の周辺分布関数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y)$（$y \in \mathbb{R}$）を求め，$F_Y(y)$ のグラフを作図せよ．ただし，答えのみでよい．

(c) X と Y は独立か従属かを調べよ．さらに，その理由を述べること．

解答と配点　(a) 10 (b) 5 (c) 5 計 20

(a)

x	1	2	3	計
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

y	2	3	4	計
$f_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 2) \\ \frac{1}{3} & (2 \le y < 3) \\ \frac{2}{3} & (3 \le y < 4) \\ 1 & (y \ge 4) \end{cases}$$

(c) X と Y が独立であるためには，すべての x と y に対して

$$f_{X,Y}(x,\,y) = f_X(x) f_Y(y) \tag{1}$$

が成立しなければならない．たとえば，$x=2,\,y=2$ で調べてみる．

$$f_{X,Y}(2,\,2) = 0 \qquad f_X(2)f_Y(2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$

したがって，X と Y は従属．

$\boxed{\text{問題 3}}$ 連続型確率ベクトル $(X,\,Y)$ は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x,\,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & (x>0,\,y>0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．$U = X+Y$ と $V=Y$ とし，確率ベクトル $(U,\,V)$ の同時確率密度関数を $f_{U,V}(u,\,v)$ とする．

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\,y)\,dx\,dy = 1$ を示せ．

(b) つぎを示せ．

$$f_{U,V}(u,\,v) = \begin{cases} e^{-u} & (0<v<u<\infty), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,\,v)\,du\,dv = 1.$$

(c) 確率変数 U の周辺確率密度関数 $f_U(u)$ を求めよ．

(d) $U=u\,(u>0)$ を与えたときの V の条件付確率密度関数を $f_{V|U}(v|\,u)$ とする．$\{v:\,f_{V|U}(v|\,u)>0\}$ はどのような集合になるかを答えよ．さらに，$f_{V|U}(v|\,u)$ を求めよ．さらに，$\int_{-\infty}^{\infty} f_{V|U}(v|\,u)\,dv = 1$ を確認せよ．

(e) $U=u\,(u>0)$ を与えたときの V の条件付期待値 $\mathbb{E}[V|\,U=u]$ を求めよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\boxed{\text{問題 1}}$のヒントは用いてよい．

$\boxed{\text{解答と配点}}$ (a) 5 (b) 5 (c) 5 (d) 10 (e) 5 計 30

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-y}\,dy \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{-y}]_0^{\infty}[-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$

(b) $\mathbb{P}(0<X=U-V,\,Y=V<\infty)=1$ より $\{(u,\,v):f_{U,V}(u,\,v)>0\} = \{(u,\,v):0<v<u<\infty\}$ となる．

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

に注意して確率変数の変数変換を用いると

$$f_{U,V}(u,\,v) = f_{X,Y}(u-v,\,u) = \begin{cases} e^{-u} & (0<v<u<\infty), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．また

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,\,v)\,du\,dv \quad = \quad \int_0^{\infty}\left(\int_v^{\infty} e^{-u}\,du\right)dv = \int_0^{\infty}\left[-e^{-u}\right]_v^{\infty}\,dv = \int_0^{\infty} e^{-v}\,dv = \left[-e^{-v}\right]_0^{\infty} = 1$$

(c) $u>0$ に対して，

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,\,v)\,dv = \int_0^{u} e^{-u}\,dv = ue^{-u}$$

となる．したがって，

$$f_U(u) = \begin{cases} ue^{-u} & (u>0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(d) $u>0$ に対して，

$$f_{V|U}(v|\,u) = \frac{f_{U,V}(u,\,v)}{f_U(u)} = \begin{cases} \frac{1}{u} & (0<v<u), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

さらに,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{V|U}(v|u)\,dv = \int_0^u \frac{1}{u}\,dv = 1$$

(e) $u > 0$ に対して,

$$\mathbb{E}[V|U=u] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_{V|U}(v|u)\,dv = \int_0^u \frac{v}{u}\,dv = \left[\frac{v^2}{2u}\right]_0^u = \frac{u}{2}$$

$\boxed{\text{問題 4}}$ X と Y の同時確率密度関数を

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < y,\ 0 < y < 2, \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とする.

(a) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

を確認せよ.

(b) $\mathbb{COV}[X,Y]$ を計算せよ.

(c) X と Y の相関係数を

$$\rho[X,\,Y] = \frac{\mathbb{COV}[X,Y]}{\sqrt{\mathbb{VAR}(X)}\sqrt{\mathbb{VAR}(Y)}}$$

で定める．$a > 0,\, b < 0$ なる定数 $a,\, b$ に対して,

$$\rho[aX,\,bY] = -\rho[X,\,Y]$$

を示せ.

$\boxed{\text{解答と配点}}$ (a) 5 (b)15 (c) 5 計 25

(a) $0 < x < 2$ に対して,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\,y)\,dy = \int_x^2 \frac{1}{2}\,dy = \frac{2-x}{2}$$

となる．よって,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{2} & (0 < x < 2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．さらに,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{2-x}{2}\,dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

が確認できる.

(b) まず,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_0^2 \left\{\int_x^2 xy\frac{1}{2}\,dy\right\} dx = \int_0^2 x\left[\frac{y^2}{4}\right]_x^2 dx = \int_0^2 x\left[1 - \frac{x^2}{4}\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 2 - 1 = 1 \\
\mathbb{E}[X] &= \int_0^2 \left\{\int_x^2 x\frac{1}{2}\,dy\right\} dx = \int_0^2 x\left[\frac{y}{2}\right]_x^2 dx = \int_0^2 x\left[1 - \frac{x}{2}\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{6} = \frac{2}{3} \\
\mathbb{E}[Y] &= \int_0^2 \left\{\int_x^2 y\frac{1}{2}\,dy\right\} dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{4}\right]_x^2 dx = \int_0^2 \left[1 - \frac{x^2}{4}\right] dx = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = 2 - \frac{8}{12} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\mathbb{COV}[X,\,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{9}$$

(c) 分散と共分散の性質より

$$\mathbb{VAR}[aX] = a^2\mathbb{VAR}[X], \qquad \mathbb{VAR}[aY] = b^2\mathbb{VAR}[Y],$$

さらに,
$$\mathbb{COV}[aX, bY] = \mathbb{E}[abXY] - \mathbb{E}[aX]\mathbb{E}[bY] = ab\mathbb{COV}[X, Y]$$
となる．したがって，$a > 0, b < 0$ より $(ab)/|ab| = -1$ に注意すれば,
$$\rho[aX, bY] = \frac{ab\mathbb{COV}[X, Y]}{\sqrt{\mathbb{VAR}(aX)}\sqrt{\mathbb{VAR}(bY)}} = \frac{ab\mathbb{COV}[X, Y]}{|ab|\sqrt{\mathbb{VAR}(X)}\sqrt{\mathbb{VAR}(Y)}} = \frac{ab}{|ab|}\rho[X, Y] = -\rho[X, Y]$$
となる．

問題 5　Ω を標本空間とし，$\mathcal{F}$ を Ω 上の完全加法族[1]とする．確率 $\mathbb{P}$ は $\mathcal{F}$ 上で定義された実数値関数でつぎの条件をみたすものであった．

(P1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathbb{P}(A) \geq 0$

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P3) $i = 1, 2, \ldots$ に対して $A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば,
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(P1) から (P3) をどこでどのように使ったかを明示（例に倣って）して (a)，(b) を証明せよ．ただし，必要な集合の演算は証明なしに用いてよい．

(a) (P1)–(P3) および (3) を用いてつぎのことを示せ：$B \in \mathcal{F}$ に対して
$$\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) \tag{2}$$
となる．ただし，B^c は B の補集合（B に含まれない Ω の元を集めたもの）である．

(b) (P1)–(P3) および (3)（必要ならば）を用いてつぎのことを示せ：$B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ に対して
$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) \leq \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2)$$
となる．

例　たとえば,
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \tag{3}$$
を示すには，$A_1 = \Omega,\ A_i = \emptyset\,(i \geq 2)$ とおくと
$$\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{4}$$
と
$$A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j) \tag{5}$$
となることに注意すれば,
$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$
となる．ただし，1 番目の等号は (4) からわかり，2 番目の等号は (5) と (P3) からわかる．したがって,
$$\sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \tag{6}$$
となる．しかし，(P1) から $\mathbb{P}(\emptyset) \geq 0$ なることと (6) から $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ がわかる．

解答と配点　(a) 5 (b) 5 計 10

[1] Ω の部分集合のなす集まりで任意の可算回の集合演算に関して閉じている．

(a) (P3) において $A_1 = B$, $A_2 = B^c$, $A_i = \emptyset\,(i \geq 3)$ とおけば，(P3) の仮定（$A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j$）をみたす．また，$\Omega = B \cap B^c = \cup_{i=i} A_i$ となることに注意する．(P2) と (P3) を使えば，

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(B \cup B^c) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c)$$

より示せた．最後の等号は (3) からわかる．
(b) $A_1 = B_1$, $A_2 = B_1^c \cap B_2$, $A_n = \emptyset\,(n \geq 3)$ とおく．このとき，共通部分の結合法則と $B \cap B^c = \emptyset$ から

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= (B_1) \cap (B_1^c \cap B_2) = (B_1 \cap B_1^c) \cap B_2 = \emptyset \cap B_2 = \emptyset, \\ A_1 \cap A_n &= = \emptyset, \qquad A_2 \cap A_n = \emptyset,\, (n \geq 3). \end{aligned}$$

よって，A_1, A_2, $A_3, \ldots$ は互いに排反な事象となる．さらに，分配法則と共通部分の結合法則を利用して，

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= \{B_1 \cup (B_1^c \cap B_2)\} \cup \emptyset = \{(B_1 \cup B_1^c) \cap (B_1 \cup B_2)\} \\ &= \Omega \cap (B_2^c \cup B_2) = B_1 \cup B_2 \end{aligned}$$

となる．したがって，(P3) と (3) より

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2) \tag{7}$$

となる．

つぎに，$A_1 = B_1 \cap B_2$, $A_2 = B_1^c \cap B_2$, $A_n = \emptyset\,(n \geq 3)$ とおく．このとき，共通部分の結合法則と $B \cap B^c = \emptyset$ から

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= (B_1 \cap B_2) \cap (B_1^c \cap B_2) = (B_1 \cap B_1^c) \cap B_2 = \emptyset \cap B_2 = \emptyset, \\ A_1 \cap A_n &= = \emptyset, \qquad A_2 \cap A_n = \emptyset,\, (n \geq 3). \end{aligned}$$

よって，A_1, A_2, $A_3, \ldots$ は互いに排反な事象となる．さらに，分配法則と共通部分の結合法則を利用して，

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 &= \{(B_1 \cap B_2) \cup (B_1^c \cap B_2)\} \cup \emptyset = \{(B_1 \cup B_1^c) \cap B_2\} \\ &= \Omega \cap B_2 = B_2 \end{aligned}$$

となる．(P3) と (3) を用いれば，

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2) + \sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2) \tag{8}$$

となる．

最後に，(7) と 8) をあわせると

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \leq= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2)$$

を得る．最後の不等号は (P1) よりわかる．

解答と配点

成績について

得点	0 ～ 14	15 ～ 29	30 ～ 49	50 ～ 69	70 ～ 100
成績	D	C	B	A	A^+

得点分布　平均点 = 46.4，中央値 = 47.0、標準偏差 = 19.4

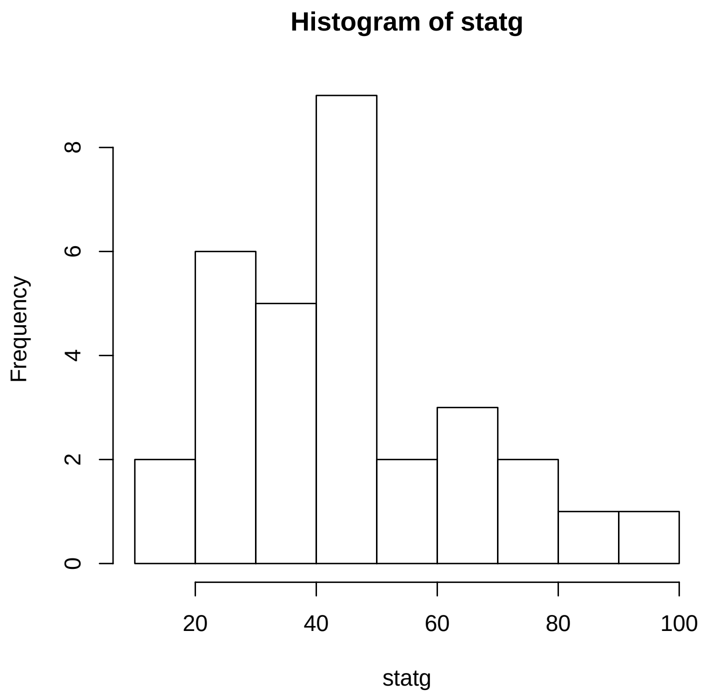

Figure 1: This is a figure