

統計解析演習の問題 (その 2)

問題 10 ふたつの事象 A, B に対して, $P(A) > 0$ ならば

$$P(B|A) \geq 1 - \left\{ \frac{P(B^c)}{P(A)} \right\}$$

が成り立つことを示せ.

ヒント:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \\ A &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ B &= (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

のような互いに排反な事象に分割できることを利用するとよい.

問題 11 A, B, C を事象としたとき, 以下を示せ. ただし, 条件付けられた事象の確率はすべて正とする.

(i) $P(B) = 1$ ならば, すべての事象 A に対して,

$$P(A|B) = P(A)$$

(ii) $A \subset B$ ならば,

$$P(B|A) = 1$$

かつ

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

(iii) A と B は互いに排反ならば

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

(iv)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

ヒント: (i) まず, $P(A \cap B^c) = 0$ を示し, $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ を利用する.

問題 12 ふたつの事象 A, B に対して

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \\ P(A^c|B) &= \frac{P(A^c)P(B|A^c)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \end{aligned}$$

を示せ．ただし，条件付けられた事象の確率はすべて正とする．

問題 13 3つの箱がある：箱 1 には赤玉が 1 つと白玉が 3 つ，箱 2 には赤玉が 2 つと白玉が 2 つ，箱 3 には赤玉が 3 つと白玉が 1 つはっている．箱を 1 つ無作為にえらひ，選ばれた箱から玉を 1 つ取る．赤玉が取られたときに，箱 1 が選ばれた条件付き確率を求めよ．

ヒント：事象 $A_i, i = 1, 2, 3$ を「箱 i を選ぶ」とし，事象 B を「赤玉が取られる」とし， $\overline{B^c}$ を「白玉が取られる」とおいてとき， $P(A_1|B)$ を求めればよいことになる． $P(A_i)$ および $P(B|A_i)$ の確率は題意から簡単に計算できるので，ベイズの定理を使えばよい．