2011 年 5 月 11 日（今野）

5 月 4 日出題のレポートのコメント (統計解析)

$\boxed{\text{問題 1.6 の (2)}}$ 命題 1.4(iv)(iii) を用いて，

$$\begin{aligned} P(A\cap B^c) - P(A)P(B^c) &= \{P(A) - P(A\cap B)\} - P(A)(1-P(B)) \\ &= -P(A\cap B) + P(A)P(B) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 1.6 の (3)}}$ 同様に，

$$\begin{aligned} P(A^c\cap B) - P(A^c)P(B) &= \{P(B) - P(A\cap B)\} - P(B)(1-P(A)) \\ &= -P(A\cap B) + P(A)P(B) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 1.8 の (2)}}$ $A_1 = \{aaa, abc, acb\}$, $A_2 = \{aaa, bac, acb\}$, $A_3 = \{aaa, bca, cba\}$ より $A_1\cap A_2 = \{aaa\}$, $A_1\cap A_3 = \{aaa\}$, $A_2\cap A_3 = \{aaa\}$ である．よって，

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2) &= P(A_1\cap A_3) = P(A_2\cap A_3) = \frac{1}{9} \\ P(A_1)P(A_2) &= P(A_1)P(A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

より A_1, A_2, A_3 は対独立.

$\boxed{\text{問題 1.8 の (3)}}$ $P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(aaa) = \frac{1}{8}$. しかし，$P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ より $P(A_1\cap A_2\cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ なので，A_1, A_2, A_3 は独立でない.

$\boxed{\text{問題 1.10 の (1)}}$ $A\cup B \subset B$ と命題 1.4(vi) と確率の定義より

$$1 \leq P(A\cup B) \leq P(B) = 1$$

なので，$P(A\cup B) = 1$．これと命題 1.4(v) より

$$\begin{aligned} P(A|\,B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A\cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A\cup B) = P(A) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 1.10 の (2)}}$ 条件つき確率 $P(B|\,A)$ が定義されているので，$P(A) > 0$ に注意する．$\subset B$ ならば，$A = A\cap B$ より

$$P(B|\,A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

$\boxed{\text{問題 1.10 の (3)}}$ $A\cap B = \emptyset$ なので，$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A|\,A\cup B) = \frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P((A\cap A)\cup(A\cap B)))}{A\cup B} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

問題 1.10 の (4)

$$P(A|\,B\cap C)P(B|\,C)P(C)=\frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)}\times\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\times P(C)=P(A\cap B\cap C)$$

問題 1.13：コインが 3 つの場合　$\Omega=\{HHH,\,HHT,\,HTH,\,THH,\,HTT,\,THT,\,TTH,\,TTT\}$ であり，

$$X(\omega)=\begin{cases}0, & (\omega=TTT)\\ 1, & (\omega=,HTT,\,THT,\,TTH)\\ 2, & (\omega=HHT,\,HTH,\,THH)\\ 3, & (\omega=HHH)\end{cases}$$

$x<0$ のとき，

$$F_X(x)=P(\emptyset)=0$$

$0\le x<1$ のとき，

$$F_X(x)=P(TTT)=\frac{1}{8}$$

$1\le x<2$ のとき，

$$F_X(x)=P(HTT,\,THT,\,TTH,\,TTT)=\frac{4}{8}$$

$2\le x<3$ のとき，

$$F_X(x)=P(,HHT,\,HTH,\,THH,\,HTT,\,THT,\,TTH,\,TTTt)=\frac{7}{8}$$

$x\ge 3$ のとき，

$$F_X(x)=P(HHH,\,HHT,\,HTH,\,THH,\,HTT,\,THT,\,TTH,\,TTTt)=\frac{8}{8}$$

よって，

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & (x<1)\\ \frac{1}{8}, & (0\le x<1)\\ \frac{4}{8}, & (1\le x<2)\\ \frac{7}{8}, & (2\le x<3)\\ 1, & (x\ge 3)\end{cases}$$

問題 1.15 の (1)　グラフを書いて，非現象，連続，$0\le F_X\le 1$ と $F_X(x)=0\,(x<0)$, $F_X(x)\,(x\ge 2)$ を確認せよ．

問題 1.15 の (3)　命題 1.4(v) より

$$\begin{aligned}P_X((-2,\,1/4]) &= P_X((-\infty,\,1/4]\cap(-\infty,\,-2]^c)=P_X((-\infty,\,1/4])-P_X((-\infty,\,-2])\\ &= F_X(1/4)-F_X(-2)=1/8-0=1/8\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}P_X((1/4,\,4]) &= P_X((-\infty,\,4]\cap(-\infty,\,1/4]^c)=P_X((-\infty,\,4])-P_X((-\infty,\,1/4])\\ &= F_X(4)-F_X(1/4)=1-1/8=7/8\end{aligned}$$

よって，(1) が示せた．