2.2 連続型確率変数のモデル

一様分布 $(U(\alpha,\,\beta)$ 確率変数を X が区間 $(\alpha,\,\beta)$ の一様分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta-\alpha), & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．

<u>一様分布の平均・分散・積率母関数</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \end{aligned}$$

正規分布 $(N(\mu,\,\sigma^2)$ 確率変数を X が母数 $(\mu,\,\sigma^2)$ の正規分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu,\,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう．
　ただし，$-\infty < \mu < \infty,\, \sigma^2 > 0$ である．
　特に，$\mu = 0,\, \sigma^2 = 1$ のとき，正規分布 $N(0,\,1$ のことを**標準正規分布**という．

<u>正規分布の平均・分散・積率母関数</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mu \\ \mathbb{VAR}[X] &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right), \qquad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

指数分布 $(EX(\lambda)$ 確率変数を X が母数 λ の指数分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu,\,\sigma^2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．
　ただし，$-\infty < \lambda < \infty$ である．

<u>指数分布の平均・分散・積率母関数</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad -\infty < t < \lambda \end{aligned}$$

ガンマ分布 ($GA(\alpha, \beta)$ 確率変数を X が母数 α, β のガンマ分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu, \sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

特に，$\alpha = n/2$, $(n \in \mathbb{N})$ と $\beta = 1/2$ のとき，ガンマ分布 $GA(n/2, 1/2)$ を自由度 n のカイ自乗分布という.

ただし，$0 < \alpha, beta < \infty$ である.

<u>ガンマ分布の平均・分散・積率母関数</u>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \mathbb{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\ M_X(t) &= (1-\beta t)^{-\alpha}, \qquad t < 1/\beta \end{aligned}$$

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha, \beta\,(\alpha < \beta) \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(\beta-\alpha)}, \alpha < x < \beta$	$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$	$\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}$
標準正規分布	なし	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha, \beta > 0$	$\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta), x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}e^{-x/2}x^{(n/2)-1}, x > 0$	n	$2n$