第2章　1 次元の確率分布の代表的モデル

2.1　離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布　確率変数を X が母数 p のベルヌーイ分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\, p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,\, 1$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{Ber}(p)$ と記す．成功の確率が $p\,(0 < p < 1)$，失敗の確率が $1-p$ の試行を**ベルヌーイ試行**とよび，この試行の成功を 1，失敗を 0 に対応させたものが X である．

ベルヌーイ分布の平均・分散

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= p \\ \mathbb{VAR}[X] &= p(1-p) \end{aligned}$$

二項分布　確率変数を X が母数 n と p の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\, n,\, p) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{BN}(n,\, p)$ と記す．

二項分布の平均・分散・積率母関数

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= np \\ \mathbb{VAR}[X] &= np(1-p) \\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

幾何分布　確率変数を X が母数 p の幾何分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\, p) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1,\, 2,\, \ldots$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{G}(p)$ と記す．

幾何分布の平均・分散・積率母関数

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p} \\
\mathbb{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2} \\
M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \qquad t < \frac{1}{1-p}
\end{aligned}
$$

負の二項分布　確率変数を X が母数 n と p の負の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$
f_X(x|\, n,\, p) = \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n (1-p)^x, \qquad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots
$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{NBN}(n,\, p)$ と記す．負の二項展開式：

$$
\frac{1}{p^n} = (p-(1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ x \end{pmatrix} (-(1-p))^x = \sum_{x=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} (1-p)^x
$$

の両辺に p^n をかけた式の各項が確率関数である．ここで負の二項係数は

$$
\begin{pmatrix} -n \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{x!}(-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix}
$$

である．

負の二項分布の平均・分散

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= n \frac{p}{1-p} \\
\mathbb{VAR}[X] &= n\frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}
$$

ポアソン分布　確率変数を X が母数 λ のポアソン分布に従うとは，X が確率関数は

$$
f_X(x|\, \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots
$$

ときをいう．ただし，$\lambda > 0$ である．この分布を $\mathrm{Po}(\lambda)$ と記す．

ポアソンの平均・分散・積率母関数

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \lambda \\
\mathbb{VAR}[X] &= \lambda \\
M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

分布	母数	確率関数 $P(X=x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0 < p < 1$	$p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$	p	$p'1-p)$
二項分布	$n \geq 1,\ 0 < p < 1$	$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし，$x = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$
幾何分布	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし，$x = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n \geq 1,\ 0 < p < 1$	$\begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n(1-p)^x$ ただし，$x = 1, 2, \ldots$	$n\dfrac{p}{1-p}$	$n\dfrac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0 < \lambda < \infty$	$\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ