1.7 確率変数の変換

確率変数 X は分布関数 $F_X(\cdot)$ を持つとする．$g(\cdot)$ をボレル可側関数としたとき，$Y=g(X)$ も確率変数になり，Y の分布 P_Y はつぎのように定まる：任意のボレル集合 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(Y\in A)=P(g(X)\in A)$$

また，Y の分布関数は

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

となる．P_Y は P_X と g に依存するので，$F_Y(\cdot)$ は $F_X(\cdot)$ と g に依存するであろう．さらに，存在するならば，$F_Y(\cdot)$ の確率密度関数 $f_Y(\cdot)$ も求めることができれば便利である．

以下の例では，$F_X(\cdot)$ は微分可能とする．

例 1.8 X の線形変換を考える．すなわち，$Y=a+bX$ である．ここで，a, b は定数で $b\ne 0$ とする．$b>0$ のとき

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(a+bX\le y)=P\left(X\le\frac{y-a}{b}\right)=F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

また，$b<0$ のとき

$$F(y)=P(Y\le y)=P\left(X\ge\frac{y-a}{b}\right)=1-P\left(X\le\frac{y-a}{b}\right)=1-F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

となる．したがって

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{1}{|b|}f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

となる．線形関すは狭義単調関数である．

例 1.9 X を正値確率変数とする．すなわち，$P(X\le 0)=0$ である．$Y=\log X$ とおく．このとき，$y\in\mathbb{R}$ に対して

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le e^y)=F_X(e^y)$$

となる．したがって

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=e^y f_X(e^y)$$

となる．$g(x)=\log x$ も $\mathbb{R}^+$ 上では狭義単調関数である．

例 1.10 $Y=X^2$ とおく．これは $\mathbb{R}$ 上の単調関数ではない．しかし，$\mathbb{R}^+$ 上と $\mathbb{R}^-$ 上では単調である．$y\ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(\omega\in\Omega:\,(X(\omega)^2)\le y)\\
&= P(\omega\in\Omega:\,(X(\omega)^2)\le y,\,X(\omega)>0)+P(\omega\in\Omega:\,(X(\omega)^2)\le y,\,X(\omega)<0)\\
&\quad +P(\omega\in\Omega:\,X(\omega)=0)\\
&= P(0<X<\sqrt{y})+P_X(-\sqrt{y}\le X<0)+P(X=0)\\
&= P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})\\
&= F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$$

となる．$y < 0$ に対しては $F_Y(y) = 0$ となるので，$f_Y(y) = 0$ となることは容易にわかる．よって

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}), & (y \geq 0), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

これらの例を踏まえて，一般の $Y = g(X)$ の場合を考える．そのために

$$\mathcal{X} = \{x :\, f_X(x) > 0\}, \qquad \mathcal{Y} = \{y :\, y = g(x), x \in \mathcal{X}\}$$

とおく．$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を X と Y の台とよぶ．たとえば，$Y = X^2$ のとき，$\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ならば，$\mathcal{Y} = [0, \infty)$ となる．

いま，関数 $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を考える．もし，g が一対一上への写像ならば，逆写像 $g^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ は定義できる．しかし，一般には，逆像で定義する．すなわち，

$$g^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{X} :\, g(x) = y\}$$

さらに，ボレル集合 A に対し

$$g^{-1}(A) = \{x \in \mathcal{X} :\, g(x) \in A\}$$

とする．すると

$$P(Y \in A) = P(\omega \in \Omega :\, g(X(\omega)) \in A) = P(X \in g^{-1}(A))$$

となる．しかし，Y の確率密度関数を求めるためには，追加の条件が必要となる．

命題 1.2

(i)　確率密度関数 $f_X(\cdot)$ は $\mathcal{X}$ 上で連続で，$g^{-1}(\cdot)$ は定義され，$\mathcal{Y}$ 上で連続微分可能とする．このとき

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|, & (y \in \mathcal{Y}, \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

(ii)　$\{\mathcal{X}_i\}_{i=0}^k$ を $\mathcal{X}$ の分割[5]とし，$P(X \in \mathcal{X}_0) = 0$ とし，$f_X(\cdot)$ は各 $\mathcal{X}_i,\, i = 1, 2, \ldots, k,$ 上で連続とする．さらに，各 $\mathcal{X}_i,\, i = 1, 2, \ldots, k,$ 上で定義された関数 $g_i(\cdot)$ が存在して，$x \in \mathcal{X}_i$

[5]すなわち，$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset\, (i \neq j)$ かつ $\mathcal{X} = \cup_{i=0}^k \mathcal{X}_i$

に対し，$g(x)=g_i(x)$ が成立し，$g_i(x)$ は $\mathcal{X}_i$ 上で狭義単調関数とし，$g_i^{-1}(\cdot)$ は $\mathcal{X}_i$ 上で定義され，$\mathcal{X}_i$ 上で連続微分可能とする．このとき，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_{i=1}^k f_X(g_i^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right|, & y\in\mathcal{Y},\\ 0, & (\text{その他})\end{cases}$$

となる．

証明 (i) g が狭義単調増加のとき，$y\in\mathcal{Y}$ に対し，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le g^{-1}(y))=F_X(g^{-1}(y))$$

となる．よって

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=f_X(g^{-1}(x))\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$$

となる．また，g が狭義単調減少のとき，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\ge g^{-1}(y))=1-F_X(g^{-1}(y))$$

となる．よって，

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=f_X(g^{-1}(x))\left(-\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right)$$

となる．g が単調増加のときは $(d/dy)g^{-1}(y)>0$，g が単調減少のときは $(d/dy)g^{-1}(y)<0$ に注意すればよい．
(ii) $y\in\mathcal{Y}$ に対し，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\sum_{i=1}^k P(g(X)\le y, X\in\mathcal{X}_I)=\sum_{i=1}^k P(X\in g_i^{-1}((-\infty,y])$$

となる．最右辺の各項に対して，(i) の議論を適用すれば，(ii) は証明される． □

例 1.11 確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\qquad -\infty<x<\infty$$

を持つとする．$Y=X^2$ としたとき，Y の確率密度関数を求めよう．関数 $g(x)=x^2$ は $(-\infty,0)$ 上と $(0,\infty)$ 上のそれぞれで単調関数である．$\mathcal{Y}=(0,\infty)$ として，命題 1.2 を利用するために，

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_0 &= \{0\},\\ \mathcal{X}_1 &= (-\infty,0),\qquad g_1(x)=x^2,\qquad g_1^{-1}=-\sqrt{y}\\ \mathcal{X}_1 &= (0,\infty),\qquad g_2(x)=x^2,\qquad g_2^{-1}=\sqrt{y}\end{aligned}$$

とおく．Y の確率密度関数は

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-\sqrt{y})^2/2} \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{y})^2/2} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2}, \qquad 0 < y < \infty
\end{aligned}
$$

となる．

例 1.12 確率変数 X は連続で分布関数 $F_X(\cdot)$ を持つとし，$Y = F_X(X)$ とおく．このとき，Y は確率密度関数

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 < y < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{1.1}
$$

を持つ．

$F_X(x)$ は x に関して狭義単調増加として証明[6]をする．$0 \leq F_X(x) \leq 1$ であり，$F_X(x) = 0$ と $F_X(x) = 1$ となる確率はゼロなので，$y \leq 0$ のときは $P(Y \leq y) = 0$ である．$0 < y < 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(F_X(X) \leq y) \\
&= P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(y)) \\
&= P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\
&= F_X(F_X^{-1}(y)) \\
&= y
\end{aligned}
$$

となる．$y \geq 1$ に対しては $P(Y \leq y) = 1$ となる．したがって，

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & (y \leq 0), \\ y, & (0 < y < 1), \\ 1, & (y \geq 1) \end{cases}
$$

となる．$0 < y < 1$ 上で $F_Y(y)$ は微分可能で導関数は 1 となる．また，$y = 0$ における $F_Y(y)$ の導関数を左微分で，$y = 1$ における $F_Y(y)$ の導関数を右微分で定めると Y の確率密度関数は (1.1) となることがわかる．

[6] この命題は $F_X(x)$ が x に関して単調増加のときに成立するが，$F_X^{-1}(x)$ の定義と証明やや難しくなるので簡単な場合のみの証明を与える．