

例 8.1  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を独立同一に正規分布  $N(\mu, 1)$  に従う確率変数とする。このとき、 $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従い、

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq 1.96\} = 0.95$$

となる。ただし、 $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$  である。事象  $\{-1.96 \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq 1.96\}$  は  $\{\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}\}$  に等しいので、

$$\mathbb{P}_\mu \left[ \bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right] = 0.95$$

となる。したがって、 $[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$  は  $\mu$  に対する信頼係数 95% の信頼区間となる。

$X_1, X_2, \dots, X_n$  を独立同一に平均  $\mu$ 、分散 1 の分布に従う確率変数とする。このとき、中心極限定理から  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に漸近的に従うことがわかるので、 $n$  が十分大きいとき

$$\mathbb{P}_\mu\{-1.96 \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \leq 1.96\} \approx 0.95$$

となる。 $[\bar{X}_n - 1.96/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1.96/\sqrt{n}]$  は  $\mu$  に対する信頼係数 95% の近似信頼区間となる。

## 2 ピボット法

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  を実数値母数  $\theta (\theta \in \Theta)$  に依存する同時分布に従う確率変数ベクトルとし、 $g(\mathbf{X}, \theta)$  を確率変数とし、その分布は  $\theta$  には依存しないとする。すなわち、

$$\mathbb{P}_\theta\{g(\mathbf{X}, \theta) \leq x\} = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

は分布関数で  $\theta$  に依存しないものである。以後では、簡単なために  $G(x)$  は  $\{x \in \mathbb{R} : G(x) > 0\}$  上で狭義単調増加の分布関数と仮定する。したがって、うまく実数  $a, b$  をとり

$$\mathbb{P}_\theta\{a \leq g(\mathbf{X}, \theta) \leq b\} = p$$

とできる。さらに、事象  $\{a \leq g(\mathbf{X}, \theta) \leq b\}$  を変形して、

$$\mathbb{P}_\theta[L(\mathbf{X}) \leq \theta \leq U(\mathbf{X})] = p$$

なる  $L(X)$ ,  $U(X)$  を見つけることができることが期待できる. このように, 信頼区間を構成するにあたり利用する確率変数  $g(X, \theta)$  を  $\theta$  に対するピボットという. 要点は  $g(X, \theta)$  の分布が未知母数  $\theta$  に依存しないことである.

**例 8.2**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) は独立同一に  $[0, \theta]$  上の一様分布に従うとする. ただし,  $\theta > 0$  である. このとき,  $\theta$  の最尤推定量は  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) の最大値  $X_{(n)}$  である. また,  $X_{(n)}/\theta$  の分布関数は

$$G(x) \equiv \mathbb{P}_\theta\{X_{(n)}/\theta \leq x\} = x^n \mathbb{I}_{[0, 1]}(x) + \mathbb{1}_{(1, \infty)}(x)$$

である. したがって,  $X_{(n)}/\theta$  は  $\theta$  に対するピボットとなる. 信頼係数 100p% の信頼区間を見つけるためには

$$\mathbb{P}_\theta \left[ a \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq b \right] = p$$

なる  $a$  と  $b$  を見つければよい.  $X_{(n)}/\theta$  の確率密度関数は単調増加なので,  $a = (1-p)^{1/n}$  と  $b = 1$  とすれば, 区間  $[a, b]$  は最短<sup>1</sup>になる. さらに, 信頼係数が 100p% の信頼区間  $[X_{(n)}/a, X_{(n)}/b]$  の中で  $[X_{(n)}, X_{(n)}/(1-p)^n]$  が最短となること<sup>2</sup>もわかる.

**例 8.3**  $X_1, X_2, \dots, X_{10}$  が独立同一に母数  $\theta$  の指数分布

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

<sup>1</sup> $[(1-p)^{1/n}, 1]$  が最短区間になることは以下のことからわかる.  $X_{(n)}/\theta$  の確率密度関数を  $f(x)$  とする.  $b < 1$  と仮定すれば,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+1-b} f(x) dx + \int_{a+1-b}^b f(x) dx - \int_b^1 f(x) dx + \int_b^1 f(x) dx \leq \int_{a+1-b}^b f(x) dx$$

となる. なぜならば,  $f(x)$  の単調性から

$$\int_a^{a+1-b} f(x) dx - \int_b^1 f(x) dx \leq 0$$

からわかる. あとは,

$$\mathbb{P}_\theta \left[ a \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq 1 \right] = G(1) - G(a) = 1 - a^n = p$$

に注意すればよい.

<sup>2</sup> $ab \leq 1$  から  $1/b - 1/a = (b-a)/(ab) > 1 - (1-p)^p$  となることよりわかる.

に従うとする。ただし、 $\theta > 0$  である。このとき、 $2\theta X_1$  は自由度 2 のカイ 2 乗分布<sup>3</sup> に従うので、 $2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i$  は自由度 20 のカイ 2 乗分布に従う。したがって、たとえば、信頼係数 90% の信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta \left[ a \leq 2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq b \right] = 0.90$$

なる  $a, b$  を見つけることになる。これは

$$\mathbb{P}_\theta \left[ 2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq a \right] = 0.05, \quad \mathbb{P}_\theta \left[ 2\theta \sum_{i=1}^{10} X_i \leq b \right] = 0.95$$

から  $a = 10.85, b = 31.41$  となる。したがって、

$$\left[ \frac{5.425}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{15.705}{\sum_{i=1}^{10} X_i} \right]$$

となる。しかし、カイ 2 乗分布の確率密度関数はモードに関して非対称なので、これは最短の区間ではない。実際、

$$\left[ \frac{4.893}{\sum_{i=1}^{10} X_i}, \frac{14.938}{\sum_{i=1}^{10} X_i} \right]$$

が最短となることが知られている。

未知母数を  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  とし、 $\theta_1$  に対する信頼区間を構成することを考える。 $g(X, \theta_1)$  は  $\theta_1$  のみに依存する確率変数で  $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_p$  には依存しないとす。さらに、 $g(X, \theta_1)$  の分布は  $\theta$  には依存しないとす。すなわち

$$\mathbb{P}_\theta \{g(X, \theta_1) \leq x\} = G(x)$$

とする。このような場合、ピボット  $g(X, \theta_1)$  を用いて  $\theta_1$  の信頼区間を構成することができる。

<sup>3</sup>自由度  $k$  のカイ 2 乗分布の確率密度関数は

$$\frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{(k/2)-1} e^{-(1/2)x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x)$$

であるので、自由度 2 のカイ 2 乗分布の密度関数は  $(1/2)e^{-(1/2)x}$  となることに注意。

例 8.4  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を独立同一に正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う確率変数とする。ここで、 $\mu, \sigma^2$  は未知とする。  $\mu$  に対する信頼区間を求めよう。そのために、

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S}$$

とおく。ただし

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

である。  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/S$  は自由度  $(n-1)$  の  $t$  分布<sup>4</sup>に従いので、この分布は  $\mu, \sigma^2$  に依存しないので、  $\mu$  のピボットとなる。

また、  $\sigma^2$  の信頼区間を構成するために

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

となるので、  $\sigma^2$  のピボットとなる。

多くの場合には、ピボットの分布を厳密に求めることが難しい。しかし、ピボットの分布の近似（漸近分布）を求めることができる。すなわち、ピボット  $g(\mathbf{X}, \theta)$  に対し

$$\mathbb{P}_\theta \{g(\mathbf{X}, \theta) \leq x\} \approx G(x)$$

なる  $\theta$  に依存しない分布関数  $G(x)$  を求めることができることがおおい。以下は近似がうまくいくために、標本数  $n$  は大きいと仮定し、大きさ  $n$  のランダム標本 (i.i.d. 標本) が得られる場合を考える。  $\hat{\theta}_n$  は  $n$  個の標本に基づく  $\theta$  の推定量とし、その漸近分布が平均  $\theta$ 、分散  $\sigma_n^2(\theta)$  の正規分布と仮定する。すなわち、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\theta)} \xrightarrow{L} N(0, 1)$$

<sup>4</sup>自由度  $k$  の  $t$  分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(k+1)/2}}$$

で与えられる。

とする<sup>5</sup> . さらに ,  $\sigma(\theta)$  に  $\hat{\theta}_n$  を代入したもの

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)}$$

も漸近的に標準正規分布に従うことが多くの場合保証されるので , これをピボットとして用いればよい . これらのことより

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ -z_{p/2} \leq \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}_n)} \leq z_{p/2} \right\} \approx 1 - p$$

を得る . ただし ,  $z_{p/2}$  は  $1 - \Phi(z_{p/2}) = p/2$  をみたす点である . したがって ,  $\theta$  に対する信頼係数  $100(1-p)\%$  の近似信頼区間は  $[\hat{\theta}_n - z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n + z_{p/2}\sigma_n(\hat{\theta}_n)]$  で与えられる .

例 8.5  $X$  を二項分布  $Bin(n, \theta)$  に従う確率変数とする . ただし ,  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) は未知とする . このとき ,  $\theta$  の最尤推定量は  $\hat{\theta}_n = X/n$  である .  $n$  が十分大きければ ,  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)}$  は近似的に標準正規分布に従うことが中心極限定理よりわかる . したがって ,  $\theta$  に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\mathbb{P}_\theta \left[ -1.96 \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \leq 1.96 \right] = \mathbb{P}_\theta \left[ \frac{n(\hat{\theta}_n - \theta)^2}{\theta(1-\theta)} \leq (1.96)^2 \right] \approx 0.95$$

より構成できる . したがって ,  $\theta$  に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\{g(t) := n(\hat{\theta}_n - t)^2 - (1.96)^2 t(1-t) \leq 0\}$$

となる .  $g(t) = 0$  の解は

$$t = \frac{\hat{\theta}_n + (1.96)^2/(2n) \pm 1.96\{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)/n + (1.96)^2/(4n^2)\}^{1/2}}{1 + (1.96)^2/n}$$

となる . したがって , 信頼区間はこの 2 点を両端にもつ区間となる . または , ピボットとして

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sqrt{\hat{\theta}_n(1-\hat{\theta}_n)}}$$

<sup>5</sup>これはすべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し ,  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ (\hat{\theta}_n - \theta)/\sigma_n(\theta) \right\} \rightarrow \Phi(x)$$

となることである . ただし ,  $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積分布関数である .

を利用すれば,  $\theta$  に対する信頼係数 95% の近似信頼区間は

$$\left[ \hat{\theta}_n - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1 - \hat{\theta}_n)}{n}}, \hat{\theta}_n + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{\theta}_n(1 - \hat{\theta}_n)}{n}} \right]$$

となる.  $n$  が大きいときには, このふたつの信頼区間は違いは小さい.

### 3 演習問題

**問題 8.1**  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  を確率密度関数

$$f_X(x|\mu) = e^{-(x-\mu)} \mathbb{1}_{[\mu, \infty)}(x) \quad \mu > 0$$

からの大きさ  $n$  のランダム標本とする. ただし,  $I_A(x)$  は指示関数とする. すなわち, 集合  $A$  に対し,  $x \in A$  ならば,  $I_A(x) = 1$ ,  $x \notin A$  ならば,  $I_A(x) = 0$  である.

- (1)  $X_1$  の累積分布関数を求めよ.
- (2)  $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  としたとき,  $Y$  の確率密度関数は

$$f_Y(y|\mu) = ne^{-n(y-\mu)} \mathbb{1}_{[\mu, \infty)}(y)$$

で与えられることを示せ.

- (3) 信頼係数 100p% ( $0 < p < 1$ ) の  $\mu$  の信頼区間を構成せよ. ただし

$$\mathbb{P}_\mu(Y - \mu \leq a) = \frac{1-p}{2}, \quad \mathbb{P}_\mu(Y - \mu \geq b) = \frac{1-p}{2}$$

をみたす点  $a, b (a < b)$  を利用する.

**問題 8.2**  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  を  $(0, \theta)$  上の一様分布からのランダム標本とする. ただし,  $\theta > 0$  である. また,  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の順序統計量とし,  $r$  を  $1 \leq r \leq n-1$  なる任意の自然数とする. このとき,  $X_{(r)}/\theta$  をピボットとして, 信頼係数 100p% ( $0 < p < 1$ ) の  $\theta$  の信頼区間を構成せよ.

ヒント 1:  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n (n \geq 2)$  は独立同一分布に従い, 連続な分布関数  $F_Y(y)$  (確率密度関数を  $f_Y(y)$  とする) を持つとき,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  の  $r$  番目の順序統計量  $Y_{(r)}$  の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f_Y(y) [F_Y(y)]^{r-1} [1 - F_Y(y)]^{n-r}$$

となる.

ヒント 2: 確率変数  $Z$  はパラメータ  $(\alpha, \beta)$  のベータ分布に従うとする: すなわち,  $Z$  の確率密度関数は

$$f_Z(z) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\beta - 1)!} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

である. ただし,  $\alpha > 0, \beta > 0$  である. このとき,  $q (0 < q < 1)$  に対して,  $u_q(\alpha, \beta)$  と  $l_q(\alpha, \beta)$  を

$$\int_{u_q(\alpha, \beta)}^1 f_Z(z) dz = q, \quad \int_0^{l_q(\alpha, \beta)} f_Z(z) dz = q$$

をみたすものとする.