A.6 偏微分とその計算法

A.6.1 偏導関数

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで定義されていて

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

がなりたつとき，$f(x,b)$ は (a,b) で**連続**であるいう．また，$f(x,y)$ がある領域 D のすべての点で連続であるとき，$f(x,y)$ は D **において連続**であるという．

関数 $z=f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで定義されているとする．y の値を b に固定して x だけの関数として $f(x,b)$ を考えるとき，x に関して微分可能ならば，$f(x,y)$ は (a,b) で x について**偏微分可能**であるといい，その微分係数を $f(x,y)$ の x についての**偏微分係数**とよび，

$$f_x(a,b) \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$$

と書く．また，$f(x,y)$ がある領域 D のすべての点で x について偏微分可能であるとき，$f(x,y)$ は D **において** x **について偏微分可能**であるといい，D 上で定義された関数 $f_x(x,y)$ を $f(x,y)$ の x についての**偏導関数**といい，

$$f_x, \qquad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial x}$$

などと書く．

y を固定する代わりに x を固定し，y の関数として微分を考ええると y についての偏微分可能性や偏導関数 f_y $\quad(\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y),$ または $\dfrac{\partial z}{\partial y})$ が同様に定義される．

3 変数以上の関数についても同様に偏導関数が定義される．

関数 $z=f(x,y)$ が領域 D において x と y について偏微分可能とする．さらに，偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が領域 D ににおいて x と y について偏微分可能ならば，4 種類の **2 次偏導関数**

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

が得られる[19]．

<u>f_{xy} と f_{yx} が一致すること</u>

f_{xy} と f_{yx} がともに (a,b) で連続ならば，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ となる．したがって，f_{xy} と f_{yx} がともに領域 D 上で連続ならば，D 上で $f_{xy}=f_{yx}$ となる．

[19]先に偏微分した方が添え字の先に現われることに注意せよ．

A.6.2 合成関数の偏微分

以下では，必要なところは微分可能もしくは偏微分可能と仮定する．

(1) 関数 $z = f(x, y)$ において，x, y がともに t の関数のとき，合成関数 $z = f(x(t), y(t))$ の導関数は

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となる．

(2) 関数 $z = f(x, y)$ において，x, y がともに u, v の関数のとき，合成関数 $z = f(x(u, v), y(u, v))$ の u と v についての偏導関数は

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

となる．

A.7 重積分

A.7.1 重積分の定義：リーマン和と積分可能性

関数 $z = f(x, y)$ は有界閉領域 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上の有界とする：すなわち，ある正数 $M > 0$ が存在し，

$$|f(x, y)| \leq M, \qquad (x, y) \in D$$

である．

区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ を分割する：

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\\ c &= y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\end{aligned}$$

領域 D を $\delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ という mn 個の長方形に分割する．この分割を Δ と書き，分割の幅を

$$|\Delta| = \max_{i,j}(x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1})$$

で定める．

ひとつの分割 Δ に対し，体積の近似和

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

を f のひとつの**リーマン和**という．ただし，$\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ は任意とする．

有界関数 $f(x, y)$ が領域 D 上で**積分可能**であるとは，ある値 V があって，任意の正の数 ϵ に対し，正の数 δ を適当にとると，$|\Delta| < \delta$ なるすべての分割 Δ について

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - V \right| < \epsilon$$

が成立することである．このとき，V を f の D 上の積分値といい

$$V = \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy$$

と書くことにする．

A.7.2 面積確定な有界集合

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A の**定義関数**を

$$I_A(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \notin A, \end{cases}$$

で定める．$\mathbb{R}^2$ の有界集合 A が**面積確定**であるとは，A の定義関数が積分可能であることである．そして，A の面積を

$$\mu(A) = \int\int_A dx\, dy$$

で定める．

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が面積 0 であるとは，任意の正数 ϵ に対して，$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i],\ i = 1, 2, \ldots, n,$ の形の有限個の長方形 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ を作って

$$A \subset \cup_{i=1}^{n} \delta_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) < \epsilon$$

とできることである．

A.7.3 重積分の性質

(1) $f(x, y)$ が D 上で連続ならば，$f(x, y)$ は D 上で積分可能．

(2) $D_1 = [a, x_0] \times [c, d]$, $D_2 = [x_0, b] \times [c, d]$ としたとき，

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \int\int_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

(3) 関数 f, g が D 上で積分可能ならば，$f + g$ も積分可能で

$$\int\int_D (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy + \int\int_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

(4) D 上で $f(x,\,y) \geq 0$ で f は積分可能ならば，

$$\int\int_D f(x,\,y)\,dx\,dy \geq 0.$$

(5) $f(x,\,y)$ が有界閉集合 D 上で有界で可積分ならば，$|f(x,\,y)|$ も A 上で可積分であって，

$$\left|\int\int_D f(x,\,y)\,dx\,dy\right| \leq \int\int_D |f(x,\,y)|\,dx\,dy.$$

(6) 任意の有界関数 $f(x,\,y)$ は面積 0 の有界集合 A 上で可積分であり，

$$\int\int_D f(x,\,y)\,dx\,dy = 0.$$

A.7.4 重積分の計算法：累次積分

領域 D は連続関数 $y=\varphi_1(x),\, y=\varphi_2(x)\,(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$ のグラフおよび直線 $x=a,\, x=b\,(a<b)$ によって囲まれているものとする．このとき，D 上の連続関数 $f(x,\,y)$ の積分は

$$\int\int_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\,y)\,dy\right) dx$$

A.7.5 重積分の変数変換

積分 $\int\int_D f(x,\,y)\,dx\,dy$ において $x,\,y$ が変数変換

$$\begin{cases} x = g(u,\,v) \\ y = h(u,\,v) \end{cases} \tag{A.1}$$

によって，$u,\,v$ に変換されたとき，積分の形はどう変わるかを調べよう．1 変数の場合は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

であった．ここで $x=g(t),\, a=g(\alpha),\, b=g(\beta)$ とした．

変換 (A.1) がふたつの有界領域 $D,\,K$ 間で一対一の対応であって，連続微分可能かつそのヤコビ行列式 (ヤコビアン) が K 上のいたるところ[20]

$$J(u,\,v) = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

であるとする．このとき，$\bar{D}_1 \subset D$ となる面積をもつ領域 D_1 に対し，変換 (A.1) によって対応する K の部分領域 K_1 も面積確定で，D_1 上の任意の積分可能な関数 $f(x,\,y)$ に対し，$f(g(u,\,v),\,h(u,\,v))$ は K_1 上で積分可能であって，

$$\int\int D_1 f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\int_{K_1} f(g(u,\,v),\,h(u,\,v))\,du\,dv$$

が成立する．

[20]いたるところ $J(u,\,v) \neq 0$ であるとは，集合 $\{(u,\,v) \in \mathbb{R}^2 : J(u,\,u) = 0$ の面積は 0 であることである．

A.7.6 広義積分

D が有界でない場合を考える．有界関数 $f(x, y)$ は，境界[21] の面積が 0 である領域 D 内の面積確定な有界閉集合 D_1 上でつねに積分可能とする．[22].

$f(x, y) \geq 0$ ならば，$f(x, y)$ の D 上の広義積分を

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \sup_{K \subset D} \int\int_K f(x, y)\,dx\,dy$$

で定める．ただし，右辺の sup は D 内のあらゆる面積確定な有界閉集合 K についての上限である．

次に，$f(x, y)$ の符号が一定でない場合を考える．そのために

$$\begin{aligned} f^+(x, y) &= \max(f(x, y), 0) \\ f^-(x, y) &= \max(-f(x, y), 0) \end{aligned}$$

とおく．$f^+(x, y) \geq 0,\ f^-(x, y) \geq 0$ であって

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$$

となる．$\int\int_D f^+(x, y)\,dx\,dy < \infty,\ \int\int_D f^-(x, y)\,dx\,dy < \infty$ のとき，D 上の $f(x, y)$ の積分を

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_D f^+(x, y)\,dx\,dy - \int\int_D f^-(x, y)\,dx\,dy$$

で定める．

$f(x, y)$ の D 上の広義積分が存在[23]するとする．D 内の面積確定な有界閉集合列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次をみたすとする．

(1) $K_1 \subset K_2 \subset\subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$.

(2) 任意の有界閉集合 $K \subset D$ に対して，ある番号 n があって $K \subset K_n$ とできる．

このとき，

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \int\int_{K_n} f(x, y)\,dx\,dy.$$

---

[21]点 $x \in \mathbb{R}^2$ が D の内点でも外点でもないときに x を D の境界という．また，x が D の内点であるとは，x のある ϵ-近傍 $U_\epsilon(x)$ を取れば，$U_\epsilon(x) \subset D$ となることであり，x が D の外点であるとは，x のある ϵ-近傍 $U_\epsilon(x)$ を取れば，$U_\epsilon(x) \subset D^c$ となることである．したがって，$\mathbb{R}^2$ は境界がない．

[22]∂D を D の境界としたとき，任意の正数 ϵ に対して，$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i],\ i = 1, 2, \ldots, n,$ の形の有限個の長方形 $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ を作って

$$\partial D \subset \cup_{i=1}^n \delta_i, \qquad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) < \epsilon$$

とできることである．

[23]すなわち，$\int\int_D |f(x, y)|\,dx\,dy < \infty$ である．

最後に，代表的な広義積分 (i) の証明を与えよう．

(i) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ の証明

まず，広義積分の定義および有界閉集合 $[0,\,R]\times[0,\,R]$ 上では $e^{-(x^2+y^2)}$ は連続であることに注意して，

$$\begin{aligned} I_\infty &= \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx\int_0^R e^{-y^2}\,dy \\ &= \lim_{R\to\infty}\int\int_{[0,\,R]\times[0,\,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \end{aligned}$$

となること[24]に注意する．いま，

$$L_R = \lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

と

$$I_R = \int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

とおく．ただし，$D_R = \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2,\, x\ge 0,\, y\ge 0\}$ である．このとき，$L_{R/\sqrt{2}} \le I_R \le L_R$ となるので，$\lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} L_R$ となる．

いま

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とおき，$K_R = \{(r,\,\theta) : 0\le r\le R,\, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ としたとき，D_R と K_R には一対一対応がある．また，

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となるので，

$$\begin{aligned} I_R &= \int\int_{K_R} re^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^R\int_0^{\pi/2} re^{-r^2}\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^R re^{-r^2}\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-R^2}\right] \end{aligned}$$

となる．したがって

$$I_\infty = \frac{\pi}{4}\lim_{R\to\infty}[1-e^{-R^2}] = \frac{\pi}{4}$$

となる． □

[24]二番目の等号は一次元の広義積分の定義，三番目の等号は有界閉集合上の累次積分である．