

3.5 2次元の確率変数の変換

(X, Y) を2次元の確率ベクトルとし, 実数値関数 $g_1(x, y), g_2(x, y)$ によって定められる新たな確率ベクトル $(U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$ の分布を求めることを考える. \mathbb{R}^2 の任意の部分集合 B に対して, \mathbb{R}^2 の部分集合 A を

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (g_1(x, y), g_2(x, y)) \in B\}$$

で定めると

$$P((U, V) \in B) = P((X, Y) \in A)$$

となる. したがって, 固定された g_1, g_2 に対して, (U, V) の分布は (X, Y) の分布のみに依存することがわかる.

3.5.1 離散型確率ベクトルの場合

(X, Y) が離散型確率ベクトルの場合をまず考えよう. (X, Y) の同時確率関数を $f_{X,Y}(x, y)$ とし, (U, V) の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u, v)$ を求めよう. そのために, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$ とし,

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して, } u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}$$

とする. すると $(u, v) \in T$ ならば, $f_{U,V}(u, v) > 0$ となり, T は可算集合となることに注意する. 任意の $(u, v) \in T$ に対して,

$$S_{uv} = \{(x, y) \in S : g_1(x, y) = u, g_2(x, y) = v\}$$

とおけば,

$$f_{U,V}(u, v) = P(U = u, V = v) = P((X, Y) \in S_{uv}) = \sum_{(x,y) \in S_{uv}} f_{X,Y}(x, y)$$

となる.

定理 3.7 X と Y は独立に平均 $\theta (\theta > 0)$ と $\lambda (\lambda > 0)$ のポアソン分布に従うとする. このとき, $X + Y$ は平均 $\theta + \lambda$ のポアソン分布に従う.

証明 仮定より (X, Y) の同時確率関数は

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, y = 0, 1, 2, \dots$$

となる. したがって, $S = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$ である.

いま, $U = X + Y, V = Y$ とおく. すなわち, $g_1(x, y) = x + y, g_2(x, y) = y$ である. $y = v, x = u - v$ から $v = 0, 2, \dots$ かつ $u - v = 0, 1, \dots$ から $u = v, v + 1, v + 2, \dots$ を得る. したがって,

$$T = \{v = 0, 1, 2, \dots; u = v, v + 1, v + 2, \dots\} = \{u = 0, 1, 2, \dots; v = 0, 1, \dots, u\}$$

となる. 任意の $(u, v) \in T$ に対して, $S_{uv} = \{(u, u - v)\}$ となるので,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, u - v) = \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta} \lambda^v e^{-\lambda}}{(u - v)! v!},$$

をえる. U の周辺確率関数を求めるために, 固定した非負整数 u を考える.

$$\{U = u\} = \cup_{v: f_{U,V}(u,v) > 0} \{U = u, V = v\}$$

と

$$\{v : f_{U,V}(u, v) > 0\} = \{0, 1, \dots, u\}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} f_U(u) &= P(U = u) = P(\cup_{v=0}^u \{U = u, V = v\}) = \sum_{v=0}^u P(U = u, V = v) = \sum_{v=0}^u f_{U,V}(u, v) \\ &= \sum_{v=0}^u \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta} \lambda^v e^{-\lambda}}{(u - v)! v!} = e^{-(\theta+\lambda)} \sum_{v=0}^u \frac{\theta^{u-v} \lambda^v}{(u - v)! v!} \\ &= \frac{e^{-(\theta+\lambda)}}{u!} \sum_{v=0}^u \binom{u}{v} \theta^{u-v} \lambda^v = \frac{e^{-(\theta+\lambda)} (\theta + \lambda)^u}{u!} \end{aligned}$$

となり, 定理は証明された. □

3.5.2 連続型の場合

(X, Y) を連続型確率変数とし, 同時確率密度関数 $f_{(X,Y)}(x, y)$ を持つとする. 前節と同様, 確率ベクトル (U, V) は $U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y)$ で定義され,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$$

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して, } u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}$$

であったことを思い出そう. 議論を簡単にするために, g_1, g_2 は一対一対応の変換と仮定し, 逆変換を

$$x = h_1(u, v), \quad y = h_2(u, v)$$

と書くことにする. さらに,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

と⁷おく。ただし,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial v},$$

である。ヤコビアン J は恒等的にゼロではないとする。このとき,

$$f_{U,V} = \begin{cases} f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J|, & (u, v) \in T \\ 0, & (u, v) \notin T \end{cases}$$

となる。これは, $(u, v) \in T$ に対して, 重積分の変数変換の公式を使えば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(U \leq u, V \leq v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int \int_{g_1(x, y) \leq u, g_2(x, y) \leq v} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J| du dv \end{aligned}$$

となることからわかる。

例 3.6 X と Y は独立に標準正規分布に従っていると仮定し, 変換

$$U = X + Y, \quad V = X - Y$$

を考える。したがって, $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = x - y$ である。 (X, Y) の同時確率密度関数は

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

であるので, $S = \mathbb{R}^2$ となる。また, g_1, g_2 は一対一対応で逆変換は

$$x = h_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \quad y = h_2(u, v) = \frac{u-v}{2}$$

となる。したがって, $T = \mathbb{R}^2$ となる。さらに,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

となるので, (U, V) の同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(u+v)^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4}\right) \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-u^2/4}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-v^2/4}\right) \end{aligned}$$

となる。これと補題 3.1 から U と V は独立となる。

⁷これをヤコビアンという。

定理 3.8 X, Y は独立な確率変数とし, $g_1(x)$ は x のみの関数で $g_2(y)$ は y のみの関数とする. このとき, $U = g_1(X)$ と $V = g_2(Y)$ も独立である.

証明 U, V は連続型の場合を示すことにする. 任意の $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ に対して,

$$S_u = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \leq u\}, \quad S_v = \{y \in \mathbb{R} : g_2(y) \leq v\},$$

とおく. このとき, (U, V) の同時分布関数は

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(X \in S_u, Y \in S_v) = P(X \in S_u)P(Y \in S_v) \end{aligned}$$

となる. これより (U, V) の同時確率密度関数は

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u, v) = \left(\frac{d}{du} P(X \in S_u) \right) \left(\frac{d}{dv} P(Y \in S_v) \right)$$

となる. したがって, 補題 3.1 から定理は証明された. □