

1.2 条件つき確率と独立性

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, $B \in \mathcal{F}$ かつ $P(B) > 0$ とする. 事象 B 上の条件つき確率とは, 完全加法族 \mathcal{F} 上で定義された確率であって, 任意の $A \in \mathcal{F}$ について

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定める. $P(A|B)$ を事象 B が与えられたときの事象 A の条件つき確率という.

命題 1.4 $P(\cdot|B)$ は確率測度である. すなわち,

- (i) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し, $P(A|B) \geq 0$
- (ii) $P(\Omega|B) = 1$
- (iii) $i = 1, 2, \dots$ に対し, $A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ ならば,

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

証明 条件付確率と確率の定義 1.3 よりわかる. □

Ω を互いに排反な事象 A_1, A_2, \dots, A_n に分割されるとする. すなわち, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ かつ $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ である. $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, $P(A_i) > 0$ のとき, 任意の事象 B の確率は条件つき確率を用いてつぎのように表現できる.

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

これを全確率の法則という.

事象 A_1, A_2, \dots, A_n は互いに排反で Ω を分割するとする. 事象 B が起こる前と後のことを事前と事後とよぶことにする. 事象 A_i に対して $P(A_i)$ は事象 B が起こる前に与えられる確率であるから事前確率といい, $P(A_i|B)$ は B が起こった後で与えられる確率であるから事後確率という.

定理 1.2 (ベイズの法則) 事後確率は事前確率を用いてつぎのように表現できる.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

証明 全確率の法則を用いればよい. □

定義 1.7 2つの事象 A, B が確率的に独立であるとは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう. 独立でないとき, 従属という.

注意 1.3 事象 A と B は独立で $P(A) > 0, P(B) > 0$ とする. このとき,

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A|B) = P(A)$$

である.

定義 1.8 事象 A_1, A_2, \dots, A_n が独立であるとは, すべての $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ と $i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}, l = 1, 2, \dots, k$, に対し

$$P(\bigcap_{l=1}^k A_{i_l}) = \prod_{l=1}^k P(A_{i_l})$$

が成り立つことである. すべての $A_i, A_j, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ に対し

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

が成り立つとき, 対独立という.

注意 1.4 対独立であっても, 独立でない場合がある.

定義 1.9 \mathcal{F}_1 と \mathcal{F}_2 を完全加法族 \mathcal{F} の部分完全加法族とする. このとき, \mathcal{F}_1 と \mathcal{F}_2 が独立であるとは, すべての $A \in \mathcal{F}_1$ と $B \in \mathcal{F}_2$ に対し

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをいう.