

1.3 確率変数

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, X を Ω から \mathbb{R} への写像とする. X によるボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ の逆像は Ω の部分集合で $X^{-1}(B)$ と記し

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

で定義する.

定理 1.3 (逆像の性質) $B, B', \{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ はボレル集合とする. このとき

- (i) $B \subset B'$ ならば, $X^{-1}(B) \subset X^{-1}(B')$
- (ii) $X^{-1}(\cup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \cup_{\gamma \in \Gamma} X^{-1}(B_\gamma)$
 $X^{-1}(\cap_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma) = \cap_{\gamma \in \Gamma} X^{-1}(B_\gamma)$
- (iii) B と B' が互いに排反ならば, $X^{-1}(B)$ と $X^{-1}(B')$ も互いに排反である.
- (iv) $X^{-1}(B^c) = \{X^{-1}(B)\}^c$

証明 集合・位相入門 (松坂和夫, 岩波) 等を参照. □

定義 1.10 写像 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の (実) 確率変数であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ をみたすときをいう.

注意 1.5 すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ をみたすことと同値である. また, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\{X < a\} \in \mathcal{F}$ とも同値である.

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 X により $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P_X がつぎのように定まる: 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P_X(B) = P_X(X \in B) = P(\omega \in X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(B))$$

P_X のことを X の分布という.

X_1, X_2, \dots, X_p が (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数のとき, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ を p -次元確率変数という.

定理 1.4 (確率変数の性質) X, Y および $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 (列) とする.

- (i) すべての $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $aX + bY$ も確率変数である.
- (ii) $\max\{X, Y\}$ も $\min\{X, Y\}$ も確率変数である.
- (iii) XY も確率変数である.
- (iv) 各 $\omega \in \Omega$ に対し, $Y(\omega) \neq 0$ ならば, X/Y も確率変数である.
- (v) $\sup_n X_n, \inf_n X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ も確率変数である.

証明 (i) を示すために, $X + Y$ と aX も確率変数であることを示す. 各 t に対して,

$$\{X + Y < t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q}} (\{X < r\} \cap \{Y < t - r\}) \in \mathcal{F}$$

となる. ただし, \mathbb{Q} は有理数とする. つぎに, aX も確率変数であることを示す. $a > 0$ の場合, $\{aX \leq t\} = \{X \leq t/a\} \in \mathcal{F}$. $a < 0$ の場合, $\{aX \leq t\} = \{X \geq t/a\} \in \mathcal{F}$.

(ii) を示すためには,

$$\{\max\{X, Y\} \leq t\} = \{X \leq t\} \cup \{Y \leq t\}$$

と

$$\{\min\{X, Y\} \leq t\} = \{X \leq t\} \cap \{Y \leq t\}$$

に注意すればよい.

(iii) を示すためには,

$$\{X^2 \leq t\} = \{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} = \{X \leq \sqrt{t}\} \setminus \{X \leq -\sqrt{t}\}$$

から X^2 は確率変数になることに注意する. さらに,

$$XY = \frac{1}{2}\{(X+Y)^2 - (X-Y)^2\}$$

から証明される.

(iv) を示すためには,

$$\{\sup_n X_n \leq t\} = \bigcap_n \{X_n \leq t\}, \quad \{\inf_n X_n \geq t\} = \bigcap_n \{X_n \geq t\}$$

から $\sup_n X_n$ と $\inf_n X_n$ は確率変数であることがわかる. さらに,

$$\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{k \geq n} X_k, \quad \liminf_n X_n = \sup_n \inf_{k \geq n} X_k$$

から (iv) は示された. □

定義 1.11 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数 X の分布関数を

$$F_X(x) = P((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$$

で定義する. ただし, x は任意に実数である.

定理 1.5 (分布関数の性質) (i) (単調性) $x, y \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $x < y$ ならば, $F_X(x) \leq F_X(y)$

(ii) (右連続性) $\lim_{y \rightarrow x+0} F_X(y) = F_X(x)$

(iii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $0 \leq F_X(x) \leq 1$ で $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ である.

証明 □

確率変数 X の分布関数が $F_X(\cdot)$ である場合「確率変数 X は分布 $F(\cdot)$ に従う」といい, “ $X \sim F_X$ ” と書くことにする.

注意 1.6 分布関数 $F(\cdot)$ が与えられたとき, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ で

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

となるものが一意的に存在することが知られている.

X と Y を確率変数としたとき, X と Y の分布が等しいとは, 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し

$$P_X(A) = P_Y(A)$$

が成り立つ⁽¹⁻²⁾ときをいう.

X と Y の分布が等しいために必要十分条件は, すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し, $F_X(x) = F_Y(x)$ が成り立つことである.