## 1.4 確率密度関数と確率関数

**定義 1.12** $F_X(\cdot)$ を確率変数 $X$ の分布関数とする．$X$ が**連続型確率変数**であるとは，$F_X$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数のときをいう．また，$X$ が**離散型確率変数**であるとは，$F_X$ が $\mathbb{R}$ 上の階段関数のときをいう．

**定義 1.13** $X$ を離散型確率変数とする．$X$ の**確率関数**を

$$f_X(x) = P(X = x), \qquad \text{すべての } x$$

で定める．

**注意 1.7** 確率変数 $X$ が離散型のとき，$\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ は高々可算個であることを示すことができる．また，$f_X(x) > 0$ なる点に対し，

$$f_X(x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{y \to x-0} F_X(y)$$

となる．$S = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ としたとき，

$$p_i = f_X(x_i), \qquad x_i \in S, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

を離散型確率変数 $X$ の分布とよぶことにする．$p_i$ と $x_i, i = 1, 2, \ldots,$ を表にまとめたものを**確率分布表**という．

**命題 1.5 (確率関数の性質)** (i) $0 \leq f_X(x) \leq 1$

(ii) $\sum_{x \in S} f_X(x) = 1$

**証明** 定義よりわかる．□

**定義 1.14** $X$ を連続型確率変数とし，$F_X(\cdot)$ をその分布関数とする．$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_X(\cdot)$ で任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

をみたすものが存在するとき，$f_X(\cdot)$ を $X$ の**確率密度関数**という．

$X$ は密度 $f_X(\cdot)$ を持つとか分布 $f_X(\cdot)$ に従うという．さらに，$F_X(\cdot)$ が $\mathbb{R}$ 上で微分可能ならば

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

となる．

**注意 1.8** $X$ が連続型確率変数ならば，任意の $x \in \mathbb{R}$ において，$P(X = x) = 0$ となる．すなわち，$P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0) = 0$ である．なぜならば，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P(X = x) &\leq P(x - \epsilon < X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq x - \epsilon) \\ &= F_X(x) - F_X(x - \epsilon) \end{aligned}$$

となり，$\epsilon \downarrow 0$ とすれば，$F_X(\cdot)$ の連続性より

$$P(X = x) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \{F_X(x) - F_X(x - \epsilon)\} = 0$$

となる．

**命題 1.6 (確率密度関数の性質)** (i) $f_X(x) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

(iii) 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,dx$$

**証明** 定義よりわかる. □