

1.5 確率変数の期待値

定義 1.15 確率変数 X は確率関数または密度関数 $f_X(\cdot)$ を持つとき, X の期待値を

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_x x f_X(x), & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & (\text{連続型}) \end{cases}$$

で定義する. ただし, 離散型の場合は $\sum_x |x| f_X(x) < \infty$ のとき, 連続型の場合は $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ のとき, X の期待値を定義することにする. 期待値が定義されるとき, X の期待値が存在するという.

一般に, \mathbb{R} 上のボレル可測関数⁽¹⁻³⁾ $g(\cdot)$ に対し, $g(X)$ の期待値を

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x), & (\text{離散型}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, & (\text{連続型}) \end{cases}$$

で定める. $g(X)$ の期待値の存在は X の期待値の存在と同様に定める.

例 1.4 X の確率分布は

X の取る値	0	1	合計
確率	1/2	1/2	1

とする. このとき,

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times f_X(0) + 1 \times f_X(1) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となる.

例 1.5 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする. このとき,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$$

例 1.6 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

を持つとする. このとき, X の期待値は存在しない. なぜならば, $M \geq 1$ に対して

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \int_1^M x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \geq \int_1^M \frac{x}{\pi(2x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

よって

$$\mathbb{E}[|X|] \geq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_1^M \frac{dx}{x} = \infty$$

よりわかる.

定理 1.6 (期待値の性質) (i) 定数 c に対して, $\mathbb{E}[c] = c$

(ii) ふたつのボレル可測関数 $h(\cdot)$ と $g(\cdot)$ および定数 a, b に対して

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$$

(iii) $h(x) \geq 0$ ならば, $\mathbb{E}[h(X)] \geq 0$

(iv) $|\mathbb{E}[h(X)]| \leq \mathbb{E}[|h(X)|]$

(v) X が非負値確率変数⁽¹⁻⁴⁾のとき, $\mathbb{E}[X] = 0$ ならば, $P(X = 0) = 1$ である.
ただし, 上記において, いずれの期待値も存在するものと仮定する.

証明 積分の性質からわかる.

□