

第2章 1 次元の確率分布の代表的モデル

2.1 離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布 確率変数を X が母数 p のベルヌーイ分布に従うとは、 X が確率関数は

$$f_X(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

ときをいう。ただし、 $0 < p < 1$ である。この分布を $\text{Ber}(p)$ と記す。成功の確率が p ($0 < p < 1$)、失敗の確率が $1-p$ の試行をベルヌーイ試行とよび、この試行の成功を 1、失敗を 0 に対応させたものが X である。

定理 2.1 (ベルヌーイ分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p \\ \text{VAR}[X] &= p(1-p)\end{aligned}$$

証明 略。

□

二項分布 確率変数を X が母数 n と p の二項分布に従うとは、 X が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

ときをいう。ただし、 $n \geq 1$ は整数、 $0 < p < 1$ である。この分布を $\text{BN}(n, p)$ と記す。

定理 2.2 (二項分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np \\ \text{VAR}[X] &= np(1-p) \\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

証明 略。

□

幾何分布 確率変数を X が母数 p の幾何分布に従うとは、 X が確率関数は

$$f_X(x|p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

ときをいう。ただし、 $0 < p < 1$ である。この分布を $\text{G}(p)$ と記す。

定理 2.3 (幾何分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2} \\ M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \quad t < \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

負の二項分布 確率変数を X が母数 n と p の負の二項分布に従うとは, X が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう. ただし, $n \geq 1$ は整数, $0 < p < 1$ である. この分布を $\text{NBN}(n, p)$ と記す. 負の二項展開式:

$$\frac{1}{p^n} = (p - (1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-n}{x} (-1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{n-1} (1-p)^x$$

の両辺に p^n をかけた式の各項が確率関数である. ここで負の二項係数は

$$\binom{-n}{x} = \frac{1}{x!} (-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x \binom{n+x-1}{n-1}$$

である.

定理 2.4 (負の二項分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= n \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

ポアソン分布 確率変数を X が母数 λ のポアソン分布に従うとは, X が確率関数は

$$f_X(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう. ただし, $\lambda > 0$ である. この分布を $\text{Po}(\lambda)$ と記す.

定理 2.5 (ポアソンの平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \lambda \\ \text{VAR}[X] &= \lambda \\ M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

分布	母数	確率関数 $P(X = x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0 < p < 1$	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし, $x = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
幾何分布	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n+x-1}{n-1} p^n(1-p)^x$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$n\frac{p}{1-p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0 < \lambda < \infty$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ