

2.2 連続型確率変数のモデル

一様分布 $(U(\alpha, \beta))$ 確率変数を X が区間 (α, β) の一様分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta - \alpha), & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

定理 2.6 (一様分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

証明 略.

□

正規分布 $(N(\mu, \sigma^2))$ 確率変数を X が母数 (μ, σ^2) の正規分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう.

ただし, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$ である.

特に, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のとき, 正規分布 $N(0, 1)$ のことを標準正規分布という.

定理 2.7 (正規分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mu \\ \text{VAR}[X] &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

証明 略.

□

指数分布 $(EX(\lambda))$ 確率変数を X が母数 λ の指数分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

ただし, $-\infty < \lambda < \infty$ である.

定理 2.8 (指数分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad -\infty < t < \lambda \end{aligned}$$

証明 略 .

□

ガンマ分布 ($GA(\alpha, \beta)$) 確率変数を X が母数 α, β のガンマ分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x | \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう .

特に, $\alpha = n/2$, ($n \in \mathbb{N}$) と $\beta = 1/2$ のとき, ガンマ分布 $GA(n/2, 1/2)$ を自由度 n のカイ自乗分布という .
ただし, $0 < \alpha, \beta < \infty$ である .

定理 2.9 (ガンマ分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \text{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\ M_X(t) &= (1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\beta \end{aligned}$$

証明 略 .

□

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha, \beta (\alpha < \beta) \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)}, \alpha < x < \beta$	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	$\frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
標準正規分布	なし	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2} x^{(n/2)-1}, x > 0$	n	$2n$

