3.2 条件付き分布と独立性

3.2.1 離散型確率変数の場合

定義 3.8 (X, Y) は離散型確率ベクトルとし，同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ および周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つとする．
(i) $P(X = x) = f_X(x) > 0$ なる任意の x に対して，$X = x$ が与えられたときの Y の **条件付確率関数**を $f_{Y|X}(y|x)$ で記し，

$$f_{Y|X}(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

で定める．
(ii) $P(Y = y) = f_Y(y) > 0$ なる任意の y に対して，$Y = y$ が与えられたときの X の **条件付確率関数**を $f_{X|Y}(x|y)$ で記し，

$$f_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

で定める．

注意 3.4 $f_{Y|X}(y|x)$ は確率関数であることに注意せよ．すなわち，各 x に対して，

- $f_{Y|X}(y|x) \geq 0,\ y \in \mathbb{R}$,
- $\sum_{y \in S_Y} f_{Y|X}(y|, x) = 1$

となっている．

例 3.2 離散型確率ベクトル (X, Y) の同時確率関数が以下のように与えられているとする：

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(0, 10) &= f_{X,Y}(0, 20) = \frac{2}{18}, \quad f_{X,Y}(1, 10) = f_{X,Y}(1, 30) = \frac{3}{18}, \\ f_{X,Y}(1, 20) &= \frac{4}{18}, \qquad f_{X,Y}(2, 39) = \frac{4}{18}. \end{aligned}$$

ただし，その他の (x, y) では $f_{X,Y}(x, y) = 0$ である．$X = x,\ x = 0, 1, 2$ が与えられたときの Y の条件付確率関数を求めよう．そのために，X の周辺確率関数を求める：

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_{X,Y}(0, 10) + f_{X,Y}(0, 29) = \frac{4}{18}, \\ f_X(1) &= f_{X,Y}(1, 10) + f_{X,Y}(1, 20) + f_{X,Y}(1, 30) = \frac{10}{18}, \\ f_X(2) &= f_{X,Y}(2, 30) = \frac{4}{18}. \end{aligned}$$

$x = 0$ のとき，$y = 10, 20$ のとき $f_{X,Y}(0, y) > 0$ であるので，$y = 10, 20$ のとき $f_{Y|X}(y|0) > 0$ となり，

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(10|0) &= \frac{f_{X,Y}(0, 10)}{f_X(0)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{2}, \\ f_{Y|X}(20|0) &= \frac{f_{X,Y}(0, 20)}{f_X(0)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる．したがって，$X = 0$ という情報から Y の条件付確率は $y = 10, 20$ にそれぞれ $1/2$ の確率を与える．

$x=1$ のとき，$y=10,\,20,\,30$ のとき $f_{Y\,|\,X}(y|\,1)>0$ となり，

$$\begin{aligned} f_{Y\,|\,X}(10|\,1) &= \frac{f_{X,\,Y}(1,\,10)}{f_X(1)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{10}, \\ f_{Y\,|\,X}(20|\,1) &= \frac{f_{X,\,Y}(1,\,20)}{f_X(1)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{4}{10}, \\ f_{Y\,|\,X}(30|\,1) &= \frac{f_{X,\,Y}(1,\,30)}{f_X(1)} = \frac{\frac{3}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{3}{10}, \end{aligned}$$

となる．したがって，$X=1$ という情報から Y の条件付確率は $y=10,\,20,\,30$ にそれぞれ 3/10, 4/10, 3/10 の確率を与える．

$x=2$ のとき，$y=30$ のとき $f_{Y\,|\,X}(y|\,2)>0$ となり，

$$f_{Y\,|\,X}(30|\,2) = \frac{f_{X,\,Y}(2,\,30)}{f_X(2)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}} = 1$$

となる．したがって，$X=2$ という情報から $Y=30$ がわかる．

たとえば，

$$\begin{aligned} P(Y>10|\,X=0) &= f_{Y\,|\,X}(20|\,0) = \frac{1}{2}, \\ P(Y>10|\,X=1) &= f_{Y\,|\,X}(20|\,1) + f_{Y\,|\,X}(30|\,1) = \frac{7}{10}, \end{aligned}$$

となる．

3.2.2 連続型確率変数の場合

定義 3.9 $(X,\,Y)$ は連続型確率ベクトルとし，同時確率密度関数 $f_{X,\,Y}(x,\,y)$ および周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つとする．

(i) $P(X=x)=f_X(x)>0$ なる任意の x に対して，$X=x$ が与えられたときの Y の **条件付確率密度関数**を $f_{Y\,|\,X}(y|\,x)$ で記し，

$$f_{Y\,|\,X}(y|\,x) = \frac{f_{X,\,Y}(x,\,y)}{f_X(x)}$$

で定める．

(ii) $P(Y=y)=f_Y(y)>0$ なる任意の y に対して，$Y=y$ が与えられたときの X の **条件付確率密度関数**を $f_{X\,|\,Y}(x|\,y)$ で記し，

$$f_{X\,|\,Y}(x|\,y) = \frac{f_{X,\,Y}(x,\,y)}{f_Y(y)}$$

で定める．

例 3.3 連続型確率ベクトル $(X,\,Y)$ は同時確率密度関数

$$f_{X,\,Y}(x,\,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y<\infty, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．$X=x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数を求めるために，X の周辺確率密度関数を求めよう．$x\le 0$ の場合，すべての y に対して $f_{X,\,Y}(x,\,y)=0$ なので，$f_X(x)=0$ となる．$x>0$ の場合，$y>x$ ならば，$f_{X,\,Y}(x,\,y)>0$ なので，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dy = \int_x^{\infty} f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dy = e^{-x}$$

となる．したがって

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となる．これより，$X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数は $x > 0$ の場合のみに定義される．各 $x > 0$ に対して

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{-(y-x)}, \qquad y > x, \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{0}{e^{-x}} = 0, \qquad y \le x \end{aligned}$$

となる．

3.2.3 独立性との関係

注意 3.5 もし，X と Y が独立ならば，x の値に関わらず

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

となる．