

3.4 共分散と相関係数

X と Y の 2 次までの積率としてそれぞれの平均と分散 :

$$\mathbb{E}[X], \quad \mathbb{E}[Y], \quad \text{VAR}[X], \quad \text{VAR}[Y]$$

に加えて, 平均まわりの相互積率を X と Y の共分散といい,

$$\text{COV}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

と記すこと⁽³⁻⁶⁾にする .

定理 3.5 (共分散の公式)

$$\text{COV}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

証明

$$\begin{aligned} \text{COV}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

がわかる .

□

定理 3.6 X と Y が独立ならば,

$$\text{COV}[X, Y] = 0$$

である .

証明

$$\begin{aligned} \text{COV}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

がわかる .

□

注意 3.6 定理 3.6 の逆は必ずしも成立しないことに注意せよ .

定理 3.7 a, b を定数として, $aX + bY$ の期待値と分散はつぎのようになる :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[aX + bY] &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y], \\ \text{VAR}[aX + bY] &= a^2\text{VAR}[X] + b^2\text{VAR}[Y] + 2ab\text{COV}[X, Y] \end{aligned}$$

となる . 特に, X と Y が独立ならば,

$$\text{VAR}[aX + bY] = a^2\text{VAR}[X] + b^2\text{VAR}[Y]$$

である .

証明

□

例 3.7 (X, Y) は同時確率密度関数

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, x < y < x+1, \\ 0, & (\text{その他}), \end{cases}$$

を持つとする。このときの X と Y の共分散を求めよう。まず、 X と Y の周辺確率密度関数を求めよう。 $0 < x < 1$ のとき、 $f_{X,Y}(x, y) > 0$ であることに注意すれば、 $0 < x < 1$ のとき、

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_x^{x+1} dy = 1$$

となる。それ以外では $f_{X,Y}(x, y) = 0$ なので、 $f_X(x) = 0$ となる。したがって

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & (\text{その他}), \end{cases}$$

となる。また、 $0 < y < 2$ のとき、 $f_{X,Y}(x, y) > 0$ となることに注意すれば、

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y 1 dx, & 0 < y < 1, \\ \int_{y-1}^1 1 dx, & 1 \leq y < 2, \end{cases} = \begin{cases} y, & 0 < y < 1, \\ 2-y, & 1 \leq y < 2, \end{cases}$$

となる。したがって

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 < y < 1, \\ 2-y, & 1 \leq y < 2, \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。これらに注意すれば、

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 y^2 dy + \int_1^2 y(2-y) dy = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^{x+1} xy dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(2x+1)}{2} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\text{COV}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{12}$$

となる。

相関係数

X と Y の標準化

$$\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{VAR}[X]}}, \quad \frac{Y - \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\text{VAR}[Y]}}$$

の積の平均を X と Y の相関係数といい、

$$\rho[X, Y] = \mathbb{E} \left[\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{VAR}[X]}} \times \frac{Y - \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\text{VAR}[Y]}} \right] = \frac{\text{COV}[X, Y]}{\sqrt{\text{VAR}[X]}\sqrt{\text{VAR}[Y]}}$$

で記すことにする。

$\rho[X, Y] > 0$ のときには X と Y に正の相関、 $\rho[X, Y] < 0$ のときには X と Y に負の相関があるといい、 $\rho[X, Y] = 0$ のときには X と Y は無相関であるという。定義と定理 3.6 から、 X と Y が独立ならば、 X と Y は無相関である。また、注意 3.6 から X と Y は無相関であっても X と Y が必ずしも独立ではない。

定理 3.8 X と Y は 2 次の積率をもつ任意の確率変数とする . このとき ,

- (i) $-1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$.
 (ii) $|\rho[X, Y]| = 1$ となるための必要十分条件は定数 $a, b (a \neq 0)$ が存在して ,

$$P(Y = aX + b) = 1$$

が成立することである . 特に , $\rho[X, Y] = 1$ ならば , $a > 0$ となり , $\rho[X, Y] = -1$ ならば , $a < 0$ となる .

証明 (i) を示すために ,

$$h(t) = \mathbb{E}\{(X - \mu_X)t + (Y - \mu_Y)\}^2$$

とする . ただし , $\mu_X = \mathbb{E}[X]$, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y]$ である . 期待値の中を展開すれば ,

$$\begin{aligned} h(t) &= t^2 \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] + 2t \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] \\ &= t^2 \text{VAR}[X] + 2\text{COV}[X, Y] + \text{VAR}[Y] \\ &= \text{VAR}[X] \left(t + \frac{\text{COV}[X, Y]}{\text{VAR}[X]} \right)^2 + \frac{\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y] - \{\text{COV}[X, Y]\}^2}{\text{VAR}[X]} \end{aligned}$$

となる . しかし , $h(t) \geq 0$ から

$$\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y] - \{\text{COV}[X, Y]\}^2 \geq 0$$

を得る . したがって ,

$$\frac{\{\text{COV}[X, Y]\}^2}{\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y]} \leq 1 \iff \left| \frac{\text{COV}[X, Y]}{\sqrt{\text{VAR}[X]}\sqrt{\text{VAR}[Y]}} \right| \leq 1$$

となり , (i) は示せた .

(ii) 上の議論から $|\rho[X, Y]| = 1$ となるための必要十分条件は

$$\text{VAR}[X]\text{VAR}[Y] - \{\text{COV}[X, Y]\}^2 = 0 \iff t \text{ の二次方程式 } h(t) = 0 \text{ は単根である .}$$

である . この解を t_0 とする . しかし , $\mathbb{E}[(X - \mu_X)t_0 + (Y - \mu_Y)] = 0$ に注意すれば ,

$$0 = h(t_0) = \mathbb{E}\{(X - \mu_X)t_0 + (Y - \mu_Y)\}^2 = \text{VAR}[(X - \mu_X)t_0 + (Y - \mu_Y)]$$

となり , 分散の性質 (iii) から

$$P((X - \mu_X)t_0 + (Y - \mu_Y) = 0) = 1$$

となる . したがって , $a = -t_0$, $b = \mu_X t_0 + \mu_Y$ とおけば , $P(aX + b = Y) = 1$ が成立することがわかる . また ,

$$h(t) = \text{VAR}[X] \left(t - \frac{\text{COV}[X, Y]}{\text{VAR}[X]} \right)^2 = 0$$

に注意すれば , 方程式

$$h(t) = \text{VAR}[X] \left(t + \frac{\text{COV}[X, Y]}{\text{VAR}[X]} \right)^2 = 0$$

の解は

$$t = t_0 = -\frac{\text{COV}[X, Y]}{\text{VAR}[X]}$$

なので ,

$$a = \frac{\text{COV}[X, Y]}{\text{VAR}[X]}$$

となる . したがって , a の符号と $\rho[X, Y]$ の符号は同じになる . よって , (ii) は示された . □