3.5 2 次元の確率変数の変換

(X, Y) を 2 次元の確率ベクトルとし，実数値関数 $g_1(x, y), g_2(x, y)$ によって定められる新たな確率ベクトル $(U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$ の分布を求めることを考える．$\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合 B に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 A を

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (g_1(x, y), g_2(x, y)) \in B\}$$

で定めると

$$P((U, V) \in B) = P((X, Y) \in A)$$

となる．したがって，固定された g_1, g_2 に対して，(U, V) の分布は (X, Y) の分布のみに依存することがわかる．

3.5.1 離散型確率ベクトルの場合

(X, Y) が離散型確率ベクトルの場合をまず考えよう．(X, Y) の同時確率関数を $f_{X,Y}(x, y)$ とし，(U, V) の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u, v)$ を求めよう．そのために，$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$ とし，

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して,} \qquad u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\}$$

とする．すると $(u, v) \in T$ ならば，$f_{U,,V}(u, v) > 0$ となり，T は可算集合となることに注意する．任意の $(u, v) \in T$ に対して，

$$S_{uv} = \{(x, y) \in S : g_1(x, y) = u, g_2(x, y) = v\}$$

とおけば，

$$f_{U,V}(u, v) = P(U = u, V = v) = P((X, Y) \in S_{uv}) = \sum_{(x,y)\in S_{uv}} f_{X,Y}(x, y)$$

となる．

定理 3.9 X と Y は独立に平均 $\theta\,(\theta > 0)$ と $\lambda\,(\lambda > 0)$ のポアソン分布に従うとする．このとき，$X + Y$ は平均 $\theta + \lambda$ のポアソン分布に従う．

証明 仮定より (X, Y) の同時確率関数は

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, y = 0, 1, 2, \ldots$$

となる．したがって，$S = \{0, 1, 2, \ldots\} \times \{0, 1, 2, \ldots\}$ である．

いま，$U = X + Y, V = Y$ とおく．すなわち，$g_1(x, y) = x + y, g_2(x, y) = y$ である．$y = v, x = u - v$ から $v = 0, 2, \ldots$ かつ $u - v = 0, 1, \ldots$ から $u = v, v + 1, v + 2, ldots$ を得る．したがって，

$$T = \{v = 0, 1, 2, \ldots; u = v, v + 1, v + 2, \ldots\} = \{u = 0, 1, 2, \ldots; v = 0, 1, \ldots, u\}$$

となる．任意の $(u, v) \in T$ に対して，$S_{uv} = \{(u, u - v)\}$ となるので，

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(u, u - v) = \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta}}{(u - v)!} \frac{\lambda^v e^{-\lambda}}{v!},$$

をえる．U の周辺確率関数を求めるために，固定した非負整数 u を考える．

$$\{U = u\} = \cup_{v: f_{U,V}(u,v)>0} \{U = u, V = v\}$$

と

$$\{v : f_{U,V}(u, v) > 0\} = \{0, 1, \ldots, u\}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} f_U(u) &= P(U = u) = P(\cup_{v=0}^{u}\{U = u, V = v\}) = \sum_{v=0}^{n} P(U = u, V = v) = \sum_{v=0}^{n} f_{U,V}(u, v) \\ &= \sum_{v=0}^{n} \frac{\theta^{u-v} e^{-\theta}}{(u-v)!} \frac{\lambda^v e^{-\lambda}}{v!} = e^{-(\theta+\lambda)} \sum_{v=0}^{n} \frac{\theta^{u-v}}{(u-v)!} \frac{\lambda^v}{v!} \\ &= \frac{e^{-(\theta+\lambda)}}{u!} \sum_{v=0}^{n} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \theta^{u-v} \lambda^v = \frac{e^{-(\theta+\lambda)}(\theta+\lambda)^u}{u!} \end{aligned}$$

となり，定理は証明された． □

3.5.2 連続型の場合

(X, Y) を連続型確率変数とし，同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を持つとする．前節と同様，確率ベクトル (U, V) は $U = g_1(X, Y), V = g_2(X, Y)$ で定義され，

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\} \\ T &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \text{ある } (x, y) \in S \text{ に対して}, \quad u = g_1(x, y), v = g_2(x, y)\} \end{aligned}$$

であったことを思い出そう．議論を簡単にするために，g_1, g_2 は一対一対応の変換と仮定し，逆変換を

$$x = h_1(u, v), \qquad y = h_2(u, v)$$

と書くことにする．さらに，

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

と(3-7)おく．ただし，

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial h_1(u, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial h_2(u, v)}{\partial v},$$

である．ヤコビアン J は恒等的にゼロではないとする．このとき，

$$f_{U,V} = \begin{cases} f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J|, & (u, v) \in T \\ 0, & (u, v) \notin T \end{cases}$$

となる．これは，$(u, v) \in T$ に対して，重積分の変数変換の公式を使えば，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} P(U \le u, V \le v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int\int_{g_1(x,y) \le u,\, g_2(x,v) \le v} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy \\ &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J|\, du\, dv \end{aligned}$$

となることからわかる．

例 3.8 X と Y は独立に標準正規分布に従っていると仮定し，変換

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y$$

を考える．したがって，$g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = x - y$ である．(X, Y) の同時確率密度関数は

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$$

であるので，$S = \mathbb{R}^2$ となる．また，g_1, g_2 は一対一対応で逆変換は

$$x = h_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \qquad y = h_2(u, v) = \frac{u-v}{2}$$

となる．したがって，$T = \mathbb{R}^2$ となる．さらに，

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

となるので，(U, V) の同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(h_1(u, v), h_2(u, v))|J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(u+v)^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4}\right) \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-u^2/4}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-v^2/4}\right) \end{aligned}$$

となる．これと補題 3.1 から U と V は独立となる．

定理 3.10 X, Y は独立な確率変数とし，$g_1(x)$ は x のみの関数で $g_2(y)$ は y のみの関数とする．このとき，$U = g_1(X)$ と $V = g_2(Y)$ も独立である．

証明 U, V は連続型の場合を示すことにする．任意の $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ に対して，

$$S_u = \{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \leq u\}, \qquad S_v = \{y \in \mathbb{R} : g_2(y) \leq v\},$$

とおく．このとき，(U, V) の同時分布関数は

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(X \in S_u, Y \in S_v) = P(X \in S_u)P(Y \in S_v) \end{aligned}$$

となる．これより (U, V) の同時確率密度関数は

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u, v) = \left(\frac{d}{du} P(X \in S_u)\right) \left(\frac{d}{dv} P(Y \in S_v)\right)$$

となる．したがって，補題 3.1 から定理は証明された． □