## 3.7 確率不等式 2

**定理 3.11 (ヘルダーの不等式)** 正数 $p, q$ は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする．$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$ なる確率変数 $X, Y$ を確率変数に対して，

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \{\mathbb{E}[|X|^p\}^{1/p}\{\mathbb{E}[|Y|^q\}^{1/q}$$

が成立する．ときに，$p = 2, q = 2$ のときの不等式

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]}\sqrt{\mathbb{E}[|Y|^2]}$$

をシュバルツの不等式という．

**証明** まず，任意の正の数 $a, b$ に対して，

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{b}b^q \geq ab \tag{3.3}$$

が成立することを示す．ただし，等号成立は $a^p = b^q$ の時に限る．$b$ を固定して，

$$g(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$$

とおき，$g(a)$ を $a$ に関して最小化する：

$$\frac{d}{da}g(a) = a^{p-1} - b = 0 \Longleftrightarrow b = a^{p-1}$$

となり，2 次の導関数を確認すれば，$a = b^{1/(p-1)}$ のとき，最小となる．したがって，

$$g(a) \geq g(b^{1/(p-1)}) = \frac{1}{p}b^{p/(p-1)} + \frac{1}{q}b^q - b^{1/(p-1)}b = \frac{1}{p}b^q + \frac{1}{q}b^q - b^q = 0$$

となる．最後から 2 番目の等号は $p/(p-1) = q$ よりわかる．

次に，

$$a = \frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}}, \qquad b = \frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}},$$

として，(3.3) を用いてば，

$$\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \geq \frac{|XY|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}}$$

を得る．この両辺の期待値を取れば，定理は証明された． □

**例 3.9** $X$ と $Y$ を確率変数とし，$\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ とする．このとき，$-\infty < \mu_X = \mathbb{E}[X], \mu_Y = \mathbb{E}[Y] < \infty$ がただちにわかる．さらに，Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]| \leq \mathbb{E}[|(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2\}}\sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2\}}$$

より

$$(\mathbb{COV}[X, Y])^2 \leq \mathbb{VAR}[X]\mathbb{VAR}[Y]$$

を得る．したがって，

$$|\rho[X, Y]| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$$

を得る．