

第2章 1 次元の確率分布の代表的モデル

2.1 離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布 確率変数 X が母数 p のベルヌーイ分布に従うとは, X が確率関数は

$$f_X(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

ときをいう. ただし, $0 < p < 1$ である. この分布を $\text{Ber}(p)$ と記す. 成功の確率が p ($0 < p < 1$), 失敗の確率が $1-p$ の試行をベルヌーイ試行とよび, この試行の成功を 1, 失敗を 0 に対応させたものが X である.

定理 2.1 (ベルヌーイ分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= p \\ \text{VAR}[X] &= p(1-p)\end{aligned}$$

証明 $\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0,1} x f_X(x|p) = 0 \times f_X(0|p) + 1 \times f_X(1|p) = p$ よりわかる. 分散も同様に $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ に注意すれば,

$$\text{VAR}[X] = \sum_{x=0,1} (x-p)^2 f_X(x|p) = (0-p)^2 \times f_X(0|p) + (1-p)^2 \times f_X(1|p) = p(1-p)$$

からわかる. □

二項分布 確率変数 X が母数 n と p の二項分布に従うとは, X が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

ときをいう. ただし, $n \geq 1$ は整数, $0 < p < 1$ である. この分布を $\text{BN}(n, p)$ と記す.

定理 2.2 (二項分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= np \\ \text{VAR}[X] &= np(1-p) \\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \quad t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

証明 まず, 積率母関数を求める. 二項定理を用いると $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^n e^{tx} f_X(x|n, p) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t + (1-p))^n$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.8 (積率母関数と積率の関係) を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = n(pe^t + (1-p))^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} = np \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = n(n-1)(pe^t + (1-p))^{n-2} (pe^t)^2 \Big|_{t=0} + n(pe^t + (1-p))^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} \\ &= n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

となり，

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = np(1-p)$$

がわかる． □

幾何分布 確率変数 X が母数 p の幾何分布に従うとは， X が確率関数は

$$f_X(x|p) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

ときをいう．ただし， $0 < p < 1$ である．この分布を $G(p)$ と記す．

定理 2.3 (幾何分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2} \\ M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \quad t < \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

証明 略． □

負の二項分布 確率変数 X が母数 n と p の負の二項分布に従うとは， X が確率関数は

$$f_X(x|n, p) = \binom{n+x-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう．ただし， $n \geq 1$ は整数， $0 < p < 1$ である．この分布を $\text{NBN}(n, p)$ と記す．負の二項展開式：

$$\frac{1}{p^n} = (p - (1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-n}{x} (-1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{n-1} (1-p)^x$$

の両辺に p^n をかけた式の各項が確率関数である．ここで負の二項係数は

$$\binom{-n}{x} = \frac{1}{x!} (-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x \binom{n+x-1}{n-1}$$

である．

定理 2.4 (負の二項分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n \frac{p}{1-p} \\ \text{VAR}[X] &= n \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

証明 略 .

□

ポアソン分布 確率変数 X が母数 λ のポアソン分布に従うとは, X が確率関数は

$$f_X(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ときをいう. ただし, $\lambda > 0$ である. この分布を $Po(\lambda)$ と記す.

定理 2.5 (ポアソンの平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \lambda \\ \text{VAR}[X] &= \lambda \\ M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned}$$

証明 まず, 積率母関数を求める. $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

となることがわかる. つぎに, 定理 1.8 (積率母関数と積率の関係) を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \right|_{t=0} = \lambda \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \right|_{t=0} + \left. (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} \right|_{t=0} \\ &= \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

となり,

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \lambda$$

がわかる.

□

分布	母数	確率関数 $P(X = x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0 < p < 1$	$p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし, $x = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
幾何分布	$0 < p < 1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	$\binom{n+x-1}{n-1} p^n(1-p)^x$ ただし, $x = 1, 2, \dots$	$n \frac{p}{1-p}$	$n \frac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0 < \lambda < \infty$	$\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ

2.2 連続型確率変数のモデル

一様分布 確率変数 X が区間 (α, β) の一様分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta - \alpha), & (\alpha < x < \beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう. この分布を $U(\alpha, \beta)$ と記すことにする.

定理 2.6 (一様分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

となることから

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3(\beta - \alpha)} - \left\{ \frac{\alpha + \beta}{2} \right\}^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

となる. □

正規分布 ($N(\mu, \sigma^2)$) 確率変数 X が母数 (μ, σ^2) の正規分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう.

ただし, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$ である.

特に, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のとき, 正規分布 $N(0, 1)$ のことを標準正規分布という.

定理 2.7 (正規分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mu \\ \text{VAR}[X] &= \sigma^2 \\ M_X(t) &= \exp \left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right), \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

証明 まず, Z が標準正規分布に従うとき, $X = \sigma Z + \mu$ とおくと X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことを示す. $g(z) = \sigma z + \mu$ と $g^{-1}(x) = (1/\sigma)(x - \mu)$ として命題 1.8 を用いると

$$f_X(x) = f_Z(g^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \left| \frac{1}{\sigma} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

となり, X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うがわかった. Z の確率密度関数を $f_Z(z) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$ とおくことにする. つぎに, 期待値の線形性と分散の性質より

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sigma\mathbb{E}[Z] + \mu \\ \text{VAR}[X] &= \sigma^2\text{VAR}[Z]\end{aligned}$$

となることに注意する. $zf_Z(z)$ は奇関数であるので,

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} zf_Z(x) dz = 0$$

がわかる. また, $z^2f_Z(z)$ は偶関数であることと部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned}\text{VAR}[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(x) dz = 2 \int_0^{\infty} z^2 f_Z(x) dz = 2 \int_0^{\infty} z(f_Z(z))' dz \\ &= [-zf_Z(z)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2zf_Z(z) dz = 1\end{aligned}$$

がわかる. 最後の等号は $\lim_{z \rightarrow \infty} zf_Z(z) = 0$ と $f_Z(z)$ は偶関数であることからわかる. □

指数分布 ($EX(\lambda)$) 確率変数を X が母数 λ の指数分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x|\mu, \sigma^2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう.

ただし, $-\infty < \lambda < \infty$ である. この分布を $Ex(\lambda)$ と記すことにする.

定理 2.8 (指数分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \text{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad -\infty < t < \lambda\end{aligned}$$

証明 まず, 積率母関数を求める. $t < \lambda$ に対して,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\lambda) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x|\lambda) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

となるのがわかる. つぎに, 定理 1.8 (積率母関数と積率の関係) を用いると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3} \right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

となり,

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

がわかる. □

ガンマ分布 確率変数 X が母数 α, β のガンマ分布に従うとは, X が確率密度関数

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう. この分布を $GA(\alpha, \beta)$ と記すことにする.

特に, $\alpha = n/2, (n \in \mathbb{N})$ と $\beta = 1/2$ のとき, ガンマ分布 $GA(n/2, 1/2)$ を自由度 n のカイ自乗分布という. ただし, $0 < \alpha, \beta < \infty$ である.

注意 2.1 $\beta = 1/\lambda$ と $\alpha = 1$ のとき, 指数分布になる.

定理 2.9 (ガンマ分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \text{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\ M_X(t) &= (1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\beta \end{aligned}$$

証明 まず, 積率母関数を求める.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) dx = 1$$

に注意する. $t < 1/\beta$ に対して,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f_X(x|\alpha, \beta) dx = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x|\alpha, \beta) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \lambda \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(-x(1 - \beta t)/\beta) dx = \left(\frac{1}{1 - \beta t} \right)^\alpha \end{aligned}$$

となることがわかる. つぎに, 定理 1.8 (積率母関数と積率の関係) を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left. \frac{d}{dt} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta t)^{\alpha+1}} \right|_{t=0} = \alpha\beta \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left. \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1 - \beta t)^{\alpha+2}} \right|_{t=0} = \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

となり,

$$\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \alpha\beta^2$$

がわかる. □

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha, \beta (\alpha < \beta) \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(\beta - \alpha)}, \alpha < x < \beta$	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	$\frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
標準正規分布	なし	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha, \beta > 0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta), x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2} x^{(n/2)-1}, x > 0$	n	$2n$