

2 変量正規分布の積率母関数について

(X, Y) の積率母関数は

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(s, t) &= \mathbb{E}[\exp(sX + tY)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx + ty) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \exp \left[s\mu_X + t\mu_Y + \frac{1}{2}(s^2\sigma_X^2 + 2st\rho\sigma_X\sigma_Y + t^2\sigma_Y^2) \right] \end{aligned}$$

であること示す．ただし， $-\infty < s, t < \infty$ である．

まず，

$$u = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}, \quad v = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

とおく．すると

$$\begin{aligned} m_{X,Y}(s, t) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(sx + ty) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \exp\{\mu_X s + \mu_Y t\} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\{s\sigma_X u + t\sigma_Y v\} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{v^2}{2}\right\} du dv \end{aligned}$$

となる．ここで

$$w = \frac{u - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

とおけば，

$$\begin{aligned} &\exp\{-(\mu_X s + \mu_Y t)\} M_{X,Y}(s, t) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\{s\sigma_X(\sqrt{1-\rho^2}w + \rho v) + t\sigma_Y v\} \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{w^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right\} dw dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(w - s\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(v - (s\rho\sigma_X + t\sigma_Y)\right)^2\right\} dw dv \\ &\quad \times \frac{1}{2} \exp\left\{(s^2\sigma_X^2(1-\rho^2) + (s\rho\sigma_X + t\sigma_Y)^2)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}(s^2\sigma_X^2 + 2st\rho\sigma_X\sigma_Y + t^2\sigma_Y^2)\right\} \end{aligned}$$

よりわかる．最後の等号は

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(w - s\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(v - (s\rho\sigma_X + t\sigma_Y)\right)^2\right\} dw dv = 1$$

は左辺の被積分関数は平均 $N(s\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}, 1)$ と $N(s\rho\sigma_X + t\sigma_Y, 1)$ に独立に従うふたつの確率変数の同時確率密度関数であることに注意すればよい．