

## 統計解析演習の問題(その1)

**問題 1** ジョーカーを除く 52 枚のトランプからカードを 1 枚無作為に抜き取る試行をし、組み札に注目するとする：クラブ (C), ダイヤ (D), ハート (H), スペード (S) . したがって、標本空間は

$$\Omega = \{C, D, H, S\}$$

である . 事象  $A, B$  を

$$A = \{C, D\}, \quad B = \{D, H, S\}$$

としたとき、つぎの事象を求めよ .

- (1)  $A \cup B$
- (2)  $A \cap B$
- (3)  $A^c$

**問題 2** 分配法則とド・モルガンの法則を示せ .

ヒント :  $A \subset B \iff$  任意の  $\omega \in A$  に対し  $\omega \in B$   
 $A = B \iff A \subset B$  かつ  $B \subset A$

**問題 3** つぎの等式を示せ . このとき、

- (1)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- (2)  $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

ヒント : 事象  $A$  に含まれる根元事象であって事象  $B$  には含まれないものの全体のつくる事象を、 $A, B$  の差といい、 $A \setminus B$  と記すことにする :

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ かつ } \omega \notin B\}$$

**問題 4**  $a, b \in \mathbb{R} (a < b)$  とする .  $\mathbb{R}$  の部分集合に関するつぎの等式を確かめよ .

- (1)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b] = [a, b]$
- (2)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - 1/n] = (a, b)$
- (3)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, a] = \{a\}$
- (4)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, a] = (-\infty, a]$
- (5)  $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (n, n + 1] = \mathbb{R}$

ヒント : (1) の等式については , (左辺)  $\subset$  (右辺) は明らか . (左辺)  $\supset$  (右辺) を示すためには , 対偶をとり ,  $x \notin [a, b]$  ならば ,  $x \notin$  (右辺) を言えばよい .

**問題 5**  $(\Omega, \mathcal{F})$  を可測空間とする .

- (1)  $A, B \in \mathcal{F}$  のとき ,  $A \cap B \in \mathcal{F}$  と  $A \setminus B \in \mathcal{F}$  を示せ .
- (2)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  のとき ,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  を示せ .

ヒント :  $\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\}^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  を利用せよ .

**問題 6** 事象  $A, B$  が互いに独立のとき , つぎの対も互いに独立であることを示せ .

- (1)  $A^c, B^c$
- (2)  $A, B^c$
- (3)  $A^c, B$

ヒント :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  を用いて , たとえば , 確率の性質 (iii) と (v) を利用して  $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$  を示せばよい . 計算は右辺から始めた方が見通しがいいようだ .

**問題 7** サイコロを 2 つ投げる試行を考える . したがって , 標本空間は

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$$

である . つぎの事象を考えよう .

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \\ B &= \{\text{ふたつのサイコロの和が } 7 \text{ 以上 } 10 \text{ 以下}\} \\ C &= \{\text{ふたつのサイコロの和が } 2 \text{ または } 7 \text{ または } 8\} \end{aligned}$$

- (1)  $P(A) = 1/6, P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$  を確認せよ .
- (2)  $A \cap B \cap C$  を求め ,  $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$  を示せ .
- (3)  $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$  と  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  を確認せよ .

**問題 8** 標本空間  $\Omega$  を 3 つの字  $a, b, c$  を並べたものとする .

$$\Omega = \{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab, \}$$

ここからどのなりびが出現する確率も  $1/9$  であるとし , 事象  $A_i, i = 1, 2, 3,$  を

$$A_i = \{\text{字の並びの } i \text{ 番目の字が } a\}$$

とする .

- (1) 事象  $A_1, A_2, A_3$  を求め ,  $P(A_i) = 1/3$  を確認せよ .
- (2)  $A_1, A_2, A_3$  は対独立であることを示せ .
- (3)  $A_1, A_2, A_3$  は独立でないことを確かめよ .