今野

統計解析演習の問題 (その４)

$\boxed{\text{問題 19}}$ X を連続型確率変数とし，a, b を定数とする．

(i) $P(X \geq a) = 1$ ならば，$\mathbb{E}[X] \geq a$ を示せ．

(ii) $P(X \leq b) = 1$ ならば，$\mathbb{E}[X] \leq b$ を示せ．

$\boxed{\text{問題 20}}$ X を離散型確率変数とし，確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} & (x = 1,\,2,\,3), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする．

(i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ．

(ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ．

(iii) $Y = (X-1)^2$ としたとき，$\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ．

(iv) X の分布関数を求め，グラフに描け．

$\boxed{\text{問題 21}}$ X を連続型確率変数とし，確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする．

(i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ．

(ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ．

(iii) $Y = -3X + 10$ としたとき，$\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ．

(iv) X の分布関数を求め，グラフに描け．

$\boxed{\text{問題 22}}$ X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とし，a, b を定数とする．このとき，以下を示せ．

(i) $\mathbb{VAR}[a] = 0$.

(ii) $\mathbb{VAR}[aX + b] = a^2\mathbb{VAR}[X]$

(iii) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$

$\boxed{\text{問題 23}}$ 　X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とする．$g(t) = \mathbb{E}[(X-t)^2]$ は $t = \mathbb{E}[X]$ で最小となることを示せ．すなわち，

$$g(t) \geq \mathbb{VAR}[X], \qquad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{問題 24}}$ 　連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1), \\ \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$（$x \in \mathbb{R}$）と X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．ただし，$F_X(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．

(ii) $Y = -2\log X$ としたとき，Y の分布関数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$（$y \in \mathbb{R}$）と確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．ただし，$F_Y(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．また，$f_Y(y) > 0$ となる y の範囲を明示すること．

(iii) Y の期待値 $\mathbb{E}[Y]$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 25}}$ 　連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を持つとする．ただし，μ, σ は定数で $-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$ とし，$\exp(x) = e^x$ である．

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

と定義したとき，以下の問いに答えよ．

(i) Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ．

(ii) $10Z + 50$ の期待値 $\mathbb{E}[10Z+50]$ と分散 $\mathbb{VAR}[10Z+50]$ を求めよ．