

1.4 確率密度関数と確率関数

定義 1.12 $F_X(\cdot)$ を確率変数 X の分布関数とする。 X が連続型確率変数であるとは、 F_X が \mathbb{R} 上の連続関数のときをいう。また、 X が離散型確率変数であるとは、 F_X が \mathbb{R} 上の階段関数のときをいう。

定義 1.13 X を離散型確率変数とする。 X の確率関数を

$$f_X(x) = P(X = x), \quad \text{すべての } x$$

で定める。

注意 1.7 確率変数 X が離散型のとき、 $\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ は高々可算個であることを示すことができる。また、 $f_X(x) > 0$ なる点に対し、

$$f_X(x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{y \rightarrow x-0} F_X(y)$$

となる。 $S = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ としたとき、

$$p_i = F_X(x_i), \quad x_i \in S, \quad i = 1, 2, \dots$$

を離散型確率変数 X の分布とよぶことにする。 p_i と $x_i, i = 1, 2, \dots$ を表にまとめたものを確率分布表という。

確率関数の性質

$$(i) \quad 0 \leq f_X(x) \leq 1$$

$$(ii) \quad \sum_{x \in S} f_X(x) = 1$$

定義 1.14 X を連続型確率変数とし、 $F_X(\cdot)$ をその分布関数とする。 \mathbb{R} 上の関数 $f_X(\cdot)$ で任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

をみたすものが存在するとき、 $f_X(\cdot)$ を X の確率密度関数という。

X は密度 $f_X(\cdot)$ を持つとか分布 $f_X(\cdot)$ に従うという。さらに、 $F_X(\cdot)$ が \mathbb{R} 上で微分可能ならば

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

となる。

注意 1.8 X が連続型確率変数ならば, 任意の $x \in \mathbb{R}$ において, $P(X = x) = 0$ となる. すなわち, $P(\omega \in \Omega : X(\omega) = 0) = 0$ である. なぜならば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P(X = x) &\leq P(x - \epsilon < X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq x - \epsilon) \\ &= F_X(x) - F_X(x - \epsilon) \end{aligned}$$

となり, $\epsilon \downarrow 0$ とすれば, $F_X(\cdot)$ の連続性より

$$P(X = x) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \{F_X(x) - F_X(x - \epsilon)\} = 0$$

となる.

確率密度関数の性質

- (i) $f_X(x) \geq 0$
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
- (iii) 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx$$