

統計解析演習の問題 (その 6)

問題 29 確率変数 X と Y の同時確率関数は下のような表で与えられるとする .

$x \backslash y$	-1	0	1	4
1	0.12	0.1	0.1	0.08
2	0.1	0.1	0.05	0.04
3	0.08	0.1	0.1	0.03

(i) つぎの確率を求めよ .

- (a) $P(X > 1, Y \leq 3)$, (b) $P(X > Y)$, (c) $P(X = 1, Y < 1)$,
 (d) $P(X = 1, Y = 0)$, (e) $P(X = 3)$,

(ii) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ. さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \quad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ .

(iii) X と Y は独立でないことを示せ .

問題 30 離散型確率変数 X, Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ は下の表のように与えられているとする .

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

(i) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ .

(ii) X の周辺分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ($y \in \mathbb{R}$) を求め , $F_X(x)$ のグラフを作図せよ .

(iii) X, Y, XY の期待値 $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(XY)$ を計算せよ .

(iv) X と Y の共分散 $\text{COV}[X, Y]$ を求めよ .

(v) X と Y は独立か従属かを調べよ . さらに , その理由を述べること .

問題 31 確率変数 X と Y の同時確率関数は下のような表で与えられるとする .

	4	1 / 16	1 / 16	1 / 16	4 / 16
	3	1 / 16	1 / 16	3 / 16	
	2	1 / 16	2 / 16		
	1	1 / 16			
y / x	1	2	3	4	

(i) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ. さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \quad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ .

(ii) $T := XY$ と $S := X + Y$ のそれぞれの周辺確率関数 $f_T(t)$ と $f_S(s)$ を求めよ. さらに

$$\sum_t f_T(t) = 1, \quad \sum_s f_S(s) = 1$$

を確認せよ .

(iii) $\mathbb{E}[XY]$ 、 $\mathbb{E}[X + Y]$ を計算せよ.

(iv) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ を計算せよ.

(v) $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率関数 $f_{Y|X}(y|x)$ と求めよ. $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率関数 $f_{Y|X}(y|x)$ が定義される各 x に対してさらに

$$\sum_y f_{Y|X}(y|x) = 1$$

を確認せよ .

(vi) $g(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ を求めよ . 更に ,

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$$

を確認せよ.

問題 32 つぎの関数が同時確率関数となるように定数 c を定め , $P(X = 1, Y > 1)$, $P(X = Y)$ を求めよ .

$$(a) \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx, & x = 1, 2, 3; y = 1, 2, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$(a) \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c|x + y|, & x = -1, 0, 1, 3; y = -1, 0, 2, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

問題 33 (X, Y) の同時確率密度関数がつぎのように与えられるとする .

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(i) つぎの確率を求めよ .

$$(a) P(0 < X \leq 0.2, 0.5 < Y < 0.8), \quad (b) P(X \leq Y), \quad (c) P(X = Y),$$

(ii) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ . さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = 1$$

を確認せよ .

問題 34 (X, Y) の同時分布関数がつぎのように与えられているとする .

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{6}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ \frac{x(x+2)}{3}, & 0 \leq x \leq 1, y > 2, \\ \frac{y(y+1)}{6}, & x > 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 1, & x > 1, y > 2, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(i) X と Y の周辺分布関数 $F_X(x)$ と $F_Y(y)$ を求めよ .

(ii) (X, Y) の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ . さらに

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

を確認せよ .

(iii) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ . さらに ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = 1$$

を確認せよ .

問題 35 (X, Y) の同時分布関数がつぎのように与えられているとする .

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{cxy}{(1+x)(1+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

ただし , c は非負の定数とする .

(i) c を求めよ .

(ii) X と Y の周辺分布関数 $F_X(x)$ と $F_Y(y)$ を求めよ .

- (iii) (X, Y) の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ．さらに

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

を確認せよ．

- (iv) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = 1$$

を確認せよ．

問題 36 連続型確率変数 X, Y は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & (0 < x < 1, 0 < y < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．

- (i) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．なお，解答には $f_X(x) > 0$ となる x の範囲を明示すること．
- (ii) X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ ，分散 $\text{VAR}[X]$ ， XY の期待値 $\mathbb{E}[XY]$ および X と Y の共分散 $\text{COV}[X, Y]$ を求めよ．ただし，最終的な数値を求めるために必要な分数の足し算や引き算の計算（通分）はしなくともよい．
- (iii) (c) $X = x$ が与えられたときの Y の条件付確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ を求めよ．ただし，解答には $f_{Y|X}(y|x)$ が定義される x の範囲と $f_{Y|X}(y|x) > 0$ となる y の範囲を明示すること．
- (iv) $X = x$ が与えられたときの Y の条件付期待値 $\mathbb{E}(Y|x)$ を求めよ．
- (v) $U = X + Y$ と $V = X - Y$ とおいたとき， U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u, v)$ を求めよ．ただし， $f_{U,V}(u, v) > 0$ となる u と v の範囲を明示すること．
- (vi) V の周辺確率密度関数 $f_V(v)$ を求めよ．ただし， $f_V(v) > 0$ となる v の範囲を明示せよ．