

統計解析演習の問題(その7)

問題 37 $0 \leq a \leq 1/2$ とし, 確率変数 X と Y は -1 と 1 の値を取り,

$$P(X = -1, Y = -1) = P(X = 1, Y = 1) = a$$

と

$$P(X = -1, Y = 1) = P(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{2} - a$$

をする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (i) $\mathbb{E}[XY]$ を計算せよ.
- (ii) X の周辺確率、 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と分散 $\text{VAR}[X]$ を求めよ.
- (iii) $X = 1$ が与えられたときの Y の条件付き確率と条件付き期待値 $\mathbb{E}[Y|X = 1]$ を求めよ.
- (iv) X と Y の相関係数 $\rho(X, Y)$ を求め, X と Y が無相関になるよう a を定めよ.
- (v) 上の問いで求めた a のとき, X と Y が独立かを調べよ.

問題 38 確率変数 (X, Y) の確率密度関数

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

で与えられているとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (i) 確率密度関数の性質を満たすよう c を定めよ.
以下は (i) で求めた c の値を使うことにする.
- (ii) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

を確認せよ.

- (iii) $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[X + Y]$ を計算せよ.
- (iv) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ を計算せよ.
- (v) $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ と求めよ. さらに, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ される各 x に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) dy = 1$$

を確認せよ.

(vi) $g(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ を求めよ. 更に, 求めた $g(X)$ について等式

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$$

が成立することを確認せよ. (一般に正しいことがわかるが, 具体的にこの問題の同時確率密度関数について成立することを確認すること)

問題 39 X と Y の同時確率密度関数を

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1, \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とする.

(i) $\text{COV}[X, Y]$ を計算せよ.

(ii) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

を確認せよ.

(iii) $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ と求めよ. さらに, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ される各 x に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) dy = 1$$

を確認せよ.

問題 40 X を離散型確率変数とし, その確率関数が

$$f_X(x) = \frac{x}{3} \quad x = 1, 2$$

で与えられ, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き確率関数が

$$f_{Y|X}(y|x) = P[Y = y|X = x] = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y = 0, \dots, x$$

で与えられるとする. ただし,

$$\binom{x}{y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$$

である.

(i) $\mathbb{E}[X]$ と $\text{VAR}[X]$ を計算せよ.

(ii) $\mathbb{E}[Y]$ を計算せよ.

(iii) X と Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ. さらに

$$\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$$

を確認せよ.