2007 年 4 月 18 日（今野）

4 月 11 日出題のレポートのコメント (統計解析)

今回は難しかったようです．下記を参考にして再度考えてみてください．それでも不明な点は質問に来てください．

$\boxed{\text{問題 4 の (1) について}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し，$a - 1/n < a$ より $(a - 1/n,\, b] \supset [a,\, b]$ となるので，

$$\cap_{n=1}^{n} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right] \supset [a,\, b]$$

はわかる．

　つぎに，

$$\cap_{n=1}^{n} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right] \subset [a,\, b]$$

を示す．このために，

$$\forall x \in \cap_{n=1}^{n} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right] \quad \Rightarrow \quad x \in [a,\, b] \tag{1}$$

を示せばよい．(1) を示すために，背理法を用いる：すわなち，

$$x \in \cap_{n=1}^{n} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right] \quad \text{かつ} \quad x \notin [a,\, b]$$

を仮定する．

　$x > b$ の場合は，明らかに $x \notin (a - 1/n,\, b]$ なので，(1) の仮定に反する．$x < a$ の場合，$1 > a - x$ と[1]する．アルキメデス性[2] より，ある自然数 n_0 が存在して，$n_0(a - x) > 1$ となる．したがって，

$$a - \frac{1}{n_0} > x$$

となり，

$$x \notin \left(a - \frac{1}{n_0},\, b\right]$$

となり，

$$x \notin \cap_{n=1}^{n} \left(a - \frac{1}{n},\, b\right]$$

よって，(1) が示せた．

---

[1] $a - x \geq 1$ の場合，$a - 1 \geq x$ となり，$x \notin (a - 1,\, b]$ となり，明らかに矛盾．

[2] $\boxed{\text{アルキメデス性 [実数の性質]}}$ $a,\, b$ を異なる実数とし，$0 < a < b$ とある．このとき，

$$b < na$$

なる自然数 n が存在する．