

統計解析演習の問題 (その 4)

問題 19 離散型確率変数 X は確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = -1, 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする .

- (i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ .
- (ii) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .

問題 20 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする .

- (i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ .
- (ii) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .

問題 21 離散型確率変数 X は確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x = -1, 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする .

- (i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ .
- (ii) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .

問題 22 離散型確率変数 X は確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-1} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする .

- (i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ .

- (ii) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .

問題 23 X を連続型確率変数とし , a, b を定数とする .

- (i) $P(X \geq a) = 1$ ならば , $\mathbb{E}[X] \geq a$ を示せ .
(ii) $P(X \leq b) = 1$ ならば , $\mathbb{E}[X] \leq b$ を示せ .

問題 24 X を離散型確率変数とし , 確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & (x = 1, 2, 3), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする .

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .
(ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ .
(iii) $Y = (X - 1)^2$ としたとき , $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ .
(iv) X の分布関数を求め , グラフに描け .

問題 25 X を連続型確率変数とし , 確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする .

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ .
(ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ .
(iii) $Y = -3X + 10$ としたとき , $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ .
(iv) X の分布関数を求め , グラフに描け .

問題 26 X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とし , a, b を定数とする . このとき , 以下を示せ .

- (i) $\text{VAR}[a] = 0$.
(ii) $\text{VAR}[aX + b] = a^2 \text{VAR}[X]$
(iii) $\text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$

問題 27 X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とする． $g(t) = \mathbb{E}[(X - t)^2]$ は $t = \mathbb{E}[X]$ で最小となることを示せ．すなわち，

$$g(t) \geq \text{VAR}[X], \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ．

問題 28 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

- (i) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ($x \in \mathbb{R}$) と X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．ただし， $F_X(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．
- (ii) $Y = -2 \log X$ としたとき， Y の分布関数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ ($y \in \mathbb{R}$) と確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．ただし， $F_Y(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数であることがわかるように答えよ．また， $f_Y(y) > 0$ となる y の範囲を明示すること．
- (iii) Y の期待値 $\mathbb{E}[Y]$ を求めよ．

問題 29 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (-\infty < x < \infty)$$

を持つとする．ただし， μ, σ は定数で $-\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$ とし， $\exp(x) = e^x$ である．

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

と定義したとき，以下の問いに答えよ．

- (i) Z の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ．
- (ii) $10Z + 50$ の期待値 $\mathbb{E}[10Z + 50]$ と分散 $\text{VAR}[10Z + 50]$ を求めよ．