今野 (2008年7月9日)

統計解析・演習の模擬試験問題（試験時間は 90 分）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めていない場合には証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) どの問題を解答しているかが明示されていれば，解答は問題番号順でなくともよい．

問題 1 標本空間 Ω を３つの字 a, b, c を並べたものとする．

$$\Omega = \{\text{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab}\}$$

ここからどのならびが出現する確率も 1/9 であるとし，事象 $A_i,\ i = 1, 2, 3,$ を

$$A_i = \{\text{字の並びの } i \text{ 番目の字が a}\}$$

とする．

$A_1 = \{aaa, abc, acb\}$ $A_2 = \{aaa, bac, cab\}$
$A_3 = \{aaa, bca, cba\}$

(1) 事象 A_1, A_2, A_3 を求め，$P(A_i) = 1/3$ を確認せよ．

(2) 対独立の定義を述べたうえで，A_1, A_2, A_3 は対独立であることを示せ．

(3) 3つの事象 A_1, A_2, A_3 は独立であるとはどのような条件をみたさなければならないかを述べた上で，A_1, A_2, A_3 は独立かどうかを確かめよ．理由を明記すること．

解答と配点

(1)

なぜか！

$$\mathbb{P}(A_1) \ \cancel{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(\text{aaa} \cup \text{abc} \cup \text{acb}) = \mathbb{P}(\text{aaa}) + \mathbb{P}(\text{abc}) + \mathbb{P}(\text{acb}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{\text{aaa}\}$ なので，$1 \le i, j \le 3 (i \ne j)$ に対して，

$$\underbrace{\frac{1}{9}}_{=\mathbb{P}(aaa)} = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$
$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$

となることよりわかる．

(3) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \text{aaa}$ より，

$$\frac{1}{9} = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{=\mathbb{P}(aaa)} \ne \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{27}$$

より，A_1, A_2, A_3 は独立ではない．

独立 ⇒ 対独立．

問題 2 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．

日本女子大学

授業科目	担当者	学科	年次	学籍番号	氏名	評価

問題1

(1) $x>0$ に対して

$$= P(X \leq x)$$

$$F_X(x) = \boxed{\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt} = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$$

$$\Vert \quad \int_0^x e^{-t}\,dt$$

よって、

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $F_X(x)$ ~~□□□~~ は非減少, 連続

(2)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\infty}$$

$$= 1 \quad // \qquad \because \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0. \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$

(3)

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^{\infty}$$

$$= 2. \qquad \because \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

（裏に続けるときは ➡ 印の所よりかくこと）

授業科目	担当者	学科	年次	学籍番号	氏名	評価

問題3

$$\begin{cases} v = x+y \\ u = y \end{cases} \quad より \quad \begin{cases} v-u = x \\ u = y \end{cases}$$

よって

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

よって、

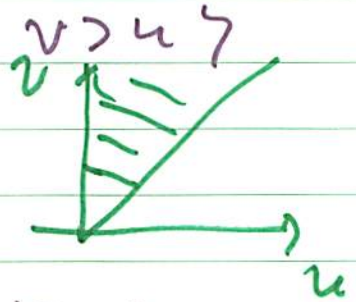
$$\cancel{f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v-u,u)}\,|J|$$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x>0,\ y>0\}$

より

$T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ;\ u>0 \quad v>u\}$

となる



$(u,v) \in T$ に対して

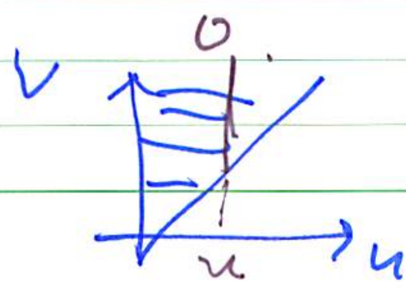
$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v-u,u)\,|J|$$

$$= e^{-v}$$

$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)}$

よって

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} e^{-v}, & v>u かつ u>0 ; \\ 0 . & \end{cases}$$



問題3の続き

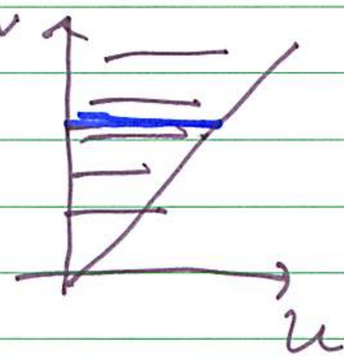
$I := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,du\,dv = 1$ の確認

$$I = \int_0^{\infty}\left\{\int_u^{\infty} e^{-v}\,dv\right\}du$$

$$= \int_0^{\infty}\left[-e^{-v}\right]_u^{\infty} du = \int_0^{\infty} e^{-u}\,du$$

$$= \left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = 1 \,_{//}$$

(2) $v > 0$ のとき



$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,du$$

$$= \int_0^{v} e^{-v}\,du$$

$$= \left[ue^{-v}\right]_0^{v} = ve^{-v}.$$

よって.

$$f_V(v) = \begin{cases} ve^{-v}, & v > 0; \\ 0, & v \le 0. \end{cases}$$

最後に

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\,dv = \int_0^{\infty} ve^{-v}\,dv = 1 \,_{//}$$

$$= \int_0^{\infty} v(-e^{-v})'\,dv = \left[-ve^{-v}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-v}\,dv = \left[-e^{-v}\right]_0^{\infty} = 1$$

問題4

日本女子大学

授業科目	担当者	学科	年次	学籍番号	氏名	評価

$x \backslash y$	-1	0	1	$\cancel{3}$ 4	
1	0.12	0.1	0.1	0.08	0.4
2	0.1	0.1	0.05	0.04	0.29
3	0.08	0.1	0.1	0.03	0.31
	0.3	0.3	0.25	0.15	

(1)

Y	-1	0	1	$\cancel{3}$ 4	計
確率	0.3	0.3	0.25	0.15	1

X	1	2	3	計
確率	0.4	0.29	0.31	1

(2) ~~独立~~ $\cancel{f_X(1) \times f_X(-1) = 0}$

$$f_X(1) \times f_Y(0) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

一方.

$$f_{X,Y}(1, 0) = 0.1$$

よって.

$$f_{X,Y}(1, 0) \neq f_X(1) \cdot f_Y(0)$$

なので 従属 $f_{X,Y}(1, -1) = f_X(1) f_Y(-1)$