

統計解析・演習の模擬試験問題(試験時間は 90 分)

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き, 答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします. 以下の点に留意して解答を作成すること.

- (1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること.
- (2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めている場合には証明なしに用いてよい. しかし, なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること.
- (3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること.
- (4) 等号の使い方に注意すること.
- (5) どの問題を解答しているかが明示されていれば, 解答は問題番号順でなくともよい.

問題 1 標本空間 Ω を 3 つの字 a, b, c を並べたものとする.

$$\Omega = \{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab\}$$

ここからどのならばが出現する確率も $1/9$ であるとし, 事象 $A_i, i = 1, 2, 3,$ を

$$A_i = \{ \text{字の並びの } i \text{ 番目の字が } a \}$$

とする.

- (1) 事象 A_1, A_2, A_3 を求め, $P(A_i) = 1/3$ を確認せよ.
- (2) 対独立の定義を述べたうえで, A_1, A_2, A_3 は対独立であることを示せ.
- (3) 3つの事象 A_1, A_2, A_3 は独立であるとはどのような条件をみたさなければならないかを述べた上で, A_1, A_2, A_3 は独立かどうかを確かめよ. 理由を明記すること.

問題 2 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする.

- (1) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ. ただし, $x \in \mathbb{R}$ である.
- (2) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.

ヒント

以下は既知としてよい. $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right\} = x \log x,$ $\frac{d}{dx} \{ x e^{-x} + e^{-x} \} = -x e^{-x},$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0,$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log x = 0,$
 $\frac{d}{dx} \{ x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} \} = -x^2 e^{-x}$

問題 3 連続型確率変数 X と Y の同時確率密度関数を

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x > 0 \text{ かつ } y > 0), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする.

- (1) $V = X + Y, U = Y$ としたとき, U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u, v)$ を求めよ. さらに

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u, v) du dv = 1$$

を確認せよ.

- (2) V の周辺確率密度関数 $f_V(v)$ を求めよ. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v) dv = 1$$

を確認せよ.

問題 4 離散型確率変数 X と Y の同時確率関数は下のような表で与えられるとする.

$x \backslash y$	-1	0	1	4
1	0.12	0.1	0.1	0.08
2	0.1	0.1	0.05	0.04
3	0.08	0.1	0.1	0.03

- (1) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ. さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \quad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ. ただし, 上記の式の和の記号 \sum_x は $f_X(x) > 0$ なる x で和をとることを意味する.

- (2) X と Y は独立か従属かをのべたうえでその理由を書け.

統計解析・演習の模擬試験問題(試験時間は 90 分)

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き, 答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします. 以下の点に留意して解答を作成すること.

- (1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること.
- (2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めている場合には証明なしに用いてよい. しかし, なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること.
- (3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること.
- (4) 等号の使い方に注意すること.
- (5) どの問題を解答しているかが明示されていれば, 解答は問題番号順でなくともよい.

問題 1 標本空間 Ω を 3 つの字 a, b, c を並べたものとする.

$$\Omega = \{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab\}$$

ここからどのならばが出現する確率も $1/9$ であるとし, 事象 $A_i, i = 1, 2, 3,$ を

$$A_i = \{ \text{字の並びの } i \text{ 番目の字が } a \}$$

とする.

- (1) 事象 A_1, A_2, A_3 を求め, $P(A_i) = 1/3$ を確認せよ.
- (2) 対独立の定義を述べたうえで, A_1, A_2, A_3 は対独立であることを示せ.
- (3) 3つの事象 A_1, A_2, A_3 は独立であるとはどのような条件をみたさなければならないかを述べた上で, A_1, A_2, A_3 は独立かどうかを確かめよ. 理由を明記すること.

問題 2 連続型確率変数 X は確率密度関数

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする.

- (1) X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ を求めよ. ただし, $x \in \mathbb{R}$ である.
- (2) X と X^2 の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.

ヒント

以下は既知としてよい. $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right\} = x \log x,$ $\frac{d}{dx} \{ x e^{-x} + e^{-x} \} = -x e^{-x},$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0,$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log x = 0,$
 $\frac{d}{dx} \{ x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} \} = -x^2 e^{-x}$

問題 3 連続型確率変数 X と Y の同時確率密度関数を

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x > 0 \text{ かつ } y > 0), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする.

- (1) $V = X + Y, U = Y$ としたとき, U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u, v)$ を求めよ. さらに

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u, v) du dv = 1$$

を確認せよ.

- (2) V の周辺確率密度関数 $f_V(v)$ を求めよ. さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v) dv = 1$$

を確認せよ.

問題 4 離散型確率変数 X と Y の同時確率関数は下のような表で与えられるとする.

$x \backslash y$	-1	0	1	4
1	0.12	0.1	0.1	0.08
2	0.1	0.1	0.05	0.04
3	0.08	0.1	0.1	0.03

- (1) X と Y の周辺確率関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ. さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \quad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ. ただし, 上記の式の和の記号 \sum_x は $f_X(x) > 0$ なる x で和をとることを意味する.

- (2) X と Y は独立か従属かをのべたうえでその理由を書け.