今野　(2008 年 7 月 23 日)

統計解析・演習の試験問題（試験時間は 80 分）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 講義で述べたことは設問中で証明することを求めていない場合には証明なしに用いてよい．しかし，なにをどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることを採点者にわかるように解答を作成することを心がけること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) どの問題を解答しているかが明示されていれば，解答は問題番号順でなくともよい．

答案は後期開講の「情報統計学」の第 1 回目の講義で返却をする．「情報統計学」の第 1 回目後に，受講しないものは研究室まで取りに来てください．

問題 1　Ω を標本空間とし，$\mathcal{F}$ を Ω 上の完全加法族[1]とする．確率 $\mathbb{P}$ は $\mathcal{F}$ 上で定義された実数値関数でつぎの条件をみたすものであった．

(P1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mathbb{P}(A) \geq 0$

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(P3) $i = 1, 2, \ldots$ に対して $A_i \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば，$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

このとき，つぎの問いに答えよ．

(1) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$．ただし，$B^c$ は B の補集合である．

(2) $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)$.

(3) 事象 $A, B \in \mathscr{F}$ は独立[2] なとき，A と B^c は独立であることを示せ．

(P1) から (P3) をどこでどのように使ったかを明示してを証明をすること．また，必要な集合の演算は証明なしに用いてよい．

解答と配点　(1) 10 (2) 10 (3) 10 計 30

(1) (P3) において $A_1 = B, A_2 = B^c, A_i = \emptyset\,(i \geq 3)$ とおけば，(P3) の仮定（$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$）をみたす．また，$\Omega = B \cap B^c = \cup_{i=i} A_i$ となることに注意する．(P2) と (P3) を使えば，

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(B \cup B^c) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \sum_{i=3}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c)$$

より示せた．最後の等号は (**??**) からわかる．

(2) $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$ より $A \cap B$ と $A \cap B^c$ は排反であり，$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A$ なので，(P3) において，$A_1 = A \cap B, A_2 = A \cap B^c, A_i = \emptyset\,(i \geq 3)$ とおけば，

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)$$

となる．

(3) A と B^c が独立であることを示すためには，

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

[1] Ω の部分集合のなす集まりで任意の可算回の集合演算に関して閉じている．

[2] すなわち，$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ が成立する．

を示せばよい．(1) と (2) から

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B^c) &= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)\\ &= \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \qquad A \text{ と } B \text{ の独立性より}\\ &= \mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(B))=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

となる．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 連続型確率ベクトル $(X,\,Y)$ は同時確率密度関数

$$f_{X,\,Y}(x,\,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\,x<y<x+1,\\ 0, & (\text{その他}),\end{cases}$$

を持つとする．

(1) 確率変数 X の周辺確率密度関数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dy$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ を求めよ．

(3) Y の周辺確率密度関数 $f_Y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx$ を求めよ．

(4) 確率変数 Y の期待値 $\mathbb{E}[Y]$ を求めよ．

(5) 確率変数 XY の期待値 $\mathbb{E}[XY]$ を求めよ．

$\boxed{\text{ヒント}}$確率ベクトル $(X,\,Y)$ は同時確率関数または同時確率密度関数 $f_{X,\,Y}(x,\,y)$ を持つとし，$g(x,\,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数とする．このとき，$g(X,\,Y)$ の期待値を

$$\mathbb{E}[g(X,\,Y)]=\begin{cases}\sum_{(x,\,y)\in S}g(x,\,y)f_{X,\,Y}(x,\,y), & (\text{離散型})\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,\,y)f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\,dy, & (\text{連続型})\end{cases}$$

で定義する．ただし，$\sum_{(x,\,y)\in S}|g(x,\,y)|f_{X,\,Y}(x,\,y)<\infty$ もしくは $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,\,y)|f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\,dy<\infty$ のとき，$g(X,\,Y)$ の期待値を定義することにする．期待値が定義されるとき，$g(X,\,Y)$ の期待値が存在するという．

$\boxed{\text{解答と配点}}$ (1) 10 (2) 10 (3) 10 (4) 10 (5) 10 計 50

(1) $0<x<1$ のとき，$f_{X,\,Y}(x,\,y)>0$ であることに注意すれば，$0<x<1$ のとき，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dy=\int_x^{x+1}dy=1$$

となる．それ以外では $f_{X,\,Y}(x,\,y)=0$ なので，$f_X(x)=0$ となる．したがって

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & (\text{その他}),\end{cases}$$

となる．

(2)

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,dx=\int_0^1x\,dx=\frac{1}{2}$$

(3) $0<y<2$ のとき，$f_{X,\,Y}(x,\,y)>0$ となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}f_{X,\,Y}(x,\,y)\,dx\\ &= \begin{cases}\int_0^y dx, & 0<y<1,\\ \int_{y-1}^1 dx, & 1\le y<2,\end{cases}\\ &= \begin{cases}y, & 0<y<1,\\ 2-y & 1\le y<2,\end{cases}\end{aligned}$$

となる．したがって

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 < y < 1, \\ 2-y, & 1 \le y < 2, \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

(4)

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^2 y(2-y)\,dy = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

(5)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^{x+1} xy\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x(2x+1)}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

問題 3　$\mathbb{E}[X^2] < \infty$ なる確率変数 X に対する分散を $\mathbb{VAR}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ で定義する．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\mathbb{VAR}[a+bX] = b^2\mathbb{VAR}[X]$．ただし，$a, b\,(b \neq 0)$ は定数である．

(2) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$.

つぎの期待値の性質は証明なしに用いてよい：

(i)　定数 c に対して，$\mathbb{E}[c] = c$

(ii)　ふたつのボレル可側[3]関数 $h(\cdot)$ と $g(\cdot)$ および定数 a, b に対して

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$$

(iii)　$h(x) \ge 0$ ならば，$\mathbb{E}[h(X)] \ge 0$

(iv)　$|\mathbb{E}[h(X)]| \le \mathbb{E}[|h(X)|]$

(v)　X が非負値確率変数[4]のとき，$\mathbb{E}[X] = 0$ ならば，$\mathbb{P}(X=0) = 1$ である．

ただし，上記において，いずれの期待値も存在するものと仮定する．

解答と配点　(1) 10 (2) 10 計 20

(1) (ii) より $\mathbb{VAR}[a+bX] = \mathbb{E}[\{a + bX - \mathbb{E}(a+bX)\}^2] = \mathbb{E}[\{b(X - \mathbb{E}(X)\}^2]$
$= b^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = b^2\mathbb{VAR}[X]$.

(2) $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \{\mathbb{E}(X)\}^2] = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2$.

解答と配点

[3]「ボレル可測」という用語は講義では定義していないが，期待値を考える上で都合のよい性質をみたしたもので連続関数や階段関数等を含むものであり，問題を解く上でこの用語にこだわる必要はない．

[4] $P(X \ge 0) = 1$ である．一般には，$\mathbb{E}[X] = 0$ であっても，$\mathbb{P}(X=0) = 1$ ではないことに注意する．

成績について

得点	$0 \sim 19$	$20 \sim 44$	$45 \sim 69$	$70 \sim 84$	$85 \sim 100$
成績	D	C	B	A	A^{+}

得点分布　平均点 $= 46.7$，中央値 $= 47.5$、標準偏差 $= 19.8$

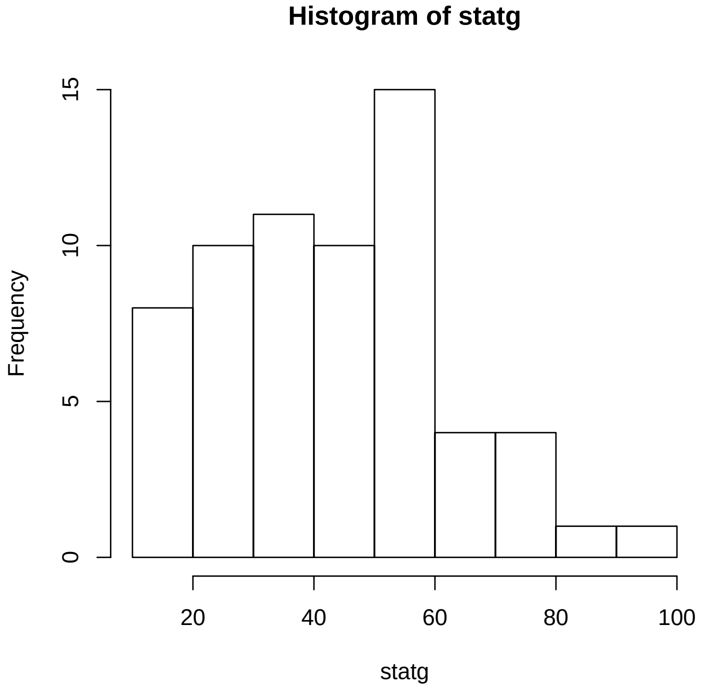

Figure 1: This is a figure