# 付 録A　補遺

## A.1　二項定理と多項定理

<u>二項定理</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k}$$

ただし，

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0! = 1$$

である．

<u>多項定理</u>

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \times \cdots \times a_r^{k_r}$$

## A.2　微積分学の復習

### A.2.1　数列

　実数を無限個

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots$$

のようにならばたものを数列といい，簡単に $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または $\{a_n\}$ と書く．数列の項の番号 $n$ を限りなく大きくすることを記号で

$$n \to \infty$$

と書く．

　数列 $\{a_n\}$ と実数 $a$ に関して $n$ を限りなく大きくしていくとき $a_n$ の値が限りなく近づくならば，数列 $\{a_n\}$ は $a$ に収束するといい，このことを

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

と書く．$a$ を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．

### A.2.2 級数

数列 $\{a_n\}$ の各項を $+$ の記号で結んだ式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を級数という．また，

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

をこの級数の部分和という．部分和の数列 $\{S_n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad \text{ただし，} S \text{ は有限な確定値}$$

が成り立つとき，この級数は収束するといい，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書く．収束しない級数は発散するという．

### A.2.3 上極限と下極限

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を補完数直線といい，順序は $-\infty < x < \infty$, $x \in \mathbb{R}$ で定める．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とする．このとき，$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ と[1]おけば，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少列 (ただし，上限が存在しない場合は，$b_n = \infty$ とする) となる．$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\geq 1} b_n$ の極限が存在する ( $\bar{\mathbb{R}}$ において) とき，

$$\limsup_n a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k$$

と定める．同様に，$c_n = \inf_{k\geq n} a_k$ とおけば，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列 (ただし，下限が存在しない場合は，$c_n = -\infty$ とする) となる．$\lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\geq 1} c_n$ の極限が存在する ($\bar{\mathbb{R}}$ において) とき，

$$\liminf_n a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k$$

と定める．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限が存在すること ($\bar{\mathbb{R}}$ において) と

$$\limsup_n a_n = \liminf_n a_n$$

は同値である．証明は杉浦 (「解析入門 I」p. 365 等を参照のこと)

[1]正確には，$A_n = \{a_k : k \geq n\}$ とし，$b_n = \sup A_n$ の意味である．

### A.2.4 合成関数の微分

関数 $z = f(y)$ と $y = g(x)$ が微分可能ならば，合成関数 $z = f(g(x))$ も $x$ について微分可能で，その微分は

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

で与えれる．

### A.2.5 逆関数の微分法

$f(x)$ が微分可能で

$$f'(x) \neq 0$$

かつ逆関数が存在するならば，$f^{-1}(x)$ も微分可能でその微分は

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}$$

で与えられる．

これは

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$$

から右側の式を $x$ で微分して

$$1 = \frac{d}{dx}f(y) = (f(y))' \cdot y'$$

よりわかる．

### A.2.6 微積分学の基本定理

$f(x)$ が連続ならば，$x$ の関数 $\int_a^x f(t)\,dt$ は微分可能であって

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

### A.2.7 指数関数の級数展開

任意の実数 $x$ に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{x!} + \cdots$$

これはマクローリンの定理から得られる．

### A.2.8 積分の計算

以下の議論での積分は可積とする．

(i) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ ただし，$c$ は定数

(ii) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $a \leq b$ のとき，$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(iv) $f(x)$ が偶関数[2]のとき，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(v) $f(x)$ が奇関数[3]のとき，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

(vi)（部分積分法） $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ ただし，$f$ と $g$ は微分可能とする．

### A.2.9 広義積分

$\mathbb{R}$ の半開区間 $I = [a,\, b)$ で[4]定義された実数値関数 $f$ がつぎをみたすものとする．

(1) 任意の $u \in I$ に対し，有界閉区間 $[a,\, u]$ で $f$ は有界で可積分[5]

(2) $\lim_{u\to b-0}\int_a^u f(x)\,dx = J \in \mathbb{R}$ が存在する．

このとき，$J$ を $I$ における $f$ の広義積分といい，

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

同様にして，$\mathbb{R}$ の半開区間 $I = (a,\, b]$ で[6]定義された実数値関数 $f$ が

(1) 任意の $u \in I$ に対し，有界閉区間 $[u,\, b]$ で $f$ は有界で可積分[7]

(2) $\lim_{u\to a+0}\int_u^b f(x)\,dx = J \in \mathbb{R}$ が存在する．

このとき，$f$ は $I$ 上で広義可積分といい，$J$ を $I$ における $f$ の広義積分といい，

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

[2]すなわち，$f(x) = f(-x)$ が成立．
[3]すなわち，$f(x) = -f(-x)$ が成立．
[4]$b = \infty$ でもよい
[5]すなわち，$\int_a^u |f(x)|\,dx < \infty$
[6]$a = -\infty$ でもよい
[7]すなわち，$\int_u^b |f(x)|\,dx < \infty$

と書く．広義可積分であることを，広義積分が収束するともいう．

また，$f : (a,\, b) \to \mathbb{R}$ に対して，任意の $c \in (a,\, b)$ をとり[8]，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

の右辺の二つの積分が存在するとき，左辺の $(a,\, b)$ 上の $f$ の広義積分を右辺で定義[9]する．すなわち，

$$\int_{v\to a+0,\, u\to b-0} \int_v^u f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>代表的な広義積分</u>

(i) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(ii) $\alpha > 0$ ならば，$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx$ は広義可積分である．特に，$\alpha$ が正の整数のとき，

(iia) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(iib) $\Gamma(1) = 1$

(iic) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$

である．

(iii) $\alpha > 0,\, \beta > 0$ のとき，$B(\alpha,\, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ は広義可積分である．また，

$$B(\alpha,\, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

が成立する．

[8] $a = -\infty,\, b = \infty$ でもよい．

[9] 内点 $c$ には $\int_a^b f(x)\,dx$ の値はよらないことに注意せよ．