第 2 章　1 次元の確率分布の代表的モデル

この章では，確率分布の具体的なモデルを学ぶ.

1　離散型確率変数のモデル

ベルヌーイ分布　確率変数 X が母数 p のベルヌーイ分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,p) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x = 0,\,1$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{Ber}(p)$ と記す．成功の確率が $p\,(0 < p < 1)$，失敗の確率が $1-p$ の試行を**ベルヌーイ試行**とよび，この試行の成功を 1，失敗を 0 に対応させたものが X である.

定理 2.1 (ベルヌーイ分布の平均・分散)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= p \\ \mathbb{VAR}[X] &= p(1-p) \end{aligned}$$

証明　$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0,\,1} x f_X(x|\,p) = 0 \times f_X(0|\,p) + 1 \times f_X(1|\,p) = p$ よりわかる．分散も同様に $\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} \mathbb{VAR}[X] &= \sum_{x=0,\,1} (x-p)^2 f_X(x|\,p) \\ &= (0-p)^2 \times f_X(0|\,p) + (1-p)^2 \times f_X(1|\,p) = p(1-p) \end{aligned}$$

からわかる.　□

二項分布　確率変数 X が母数 n と p の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|n,p) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{BN}(n, p)$ と記す.

定理 2.2 (二項分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= np \\ \mathbb{VAR}[X] &= np(1-p) \\ M_X(t) &= (pe^t + (1-p))^n, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．二項定理を用いると $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} f_X(x|n,p) = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \\ &= (pe^t + (1-p))^n \end{aligned}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.3（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left.\frac{d}{dt} M_X(t)\right|_{t=0} = n(pe^t + (1-p))^{n-1} pe^t\Big|_{t=0} = np \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\right|_{t=0} \\ &= n(n-1)(pe^t + (1-p))^{n-2}(pe^t)^2\Big|_{t=0} + n(pe^t + (1-p))^{n-1}pe^t\Big|_{t=0} \\ &= n(n-1)p^2 + np \end{aligned}$$

となり,

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = np(1-p)$$

がわかる.　□

幾何分布　確率変数 X が母数 p の幾何分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|p) = p(1-p)^{x-1}, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

ときをいう．ただし，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{G}(p)$ と記す．

定理 2.3 (幾何分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{p}{1-p}\\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{1-p}{p^2}\\ M_X(t) &= \frac{p}{1-t(1-p)}, \qquad t < \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

証明 略． □

負の二項分布 確率変数 X が母数 n と p の負の二項分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\,n,\,p) = \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n(1-p)^x, \qquad x = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

ときをいう．ただし，$n \geq 1$ は整数，$0 < p < 1$ である．この分布を $\mathrm{NBN}(n,\,p)$ と記す．負の二項展開式：

$$\frac{1}{p^n} = (p-(1-p))^n = \sum_{x=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -n \\ x \end{pmatrix} (-(1-p))^x = \sum_{x=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} (1-p)^x$$

の両辺に p^n をかけた式の各項が確率関数である．ここで負の二項係数は

$$\begin{pmatrix} -n \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{x!}(-n)(-n+1)\cdots(-n-x+1) = (-1)^x \begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

である．

定理 2.4 (負の二項分布の平均・分散)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n\frac{p}{1-p}\\ \mathbb{VAR}[X] &= n\frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

証明　略. □

ポアソン分布　確率変数 X が母数 λ のポアソン分布に従うとは，X が確率関数は

$$f_X(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

ときをいう．ただし，$\lambda > 0$ である．この分布を $\mathrm{Po}(\lambda)$ と記す．

定理 2.5 (ポアソンの平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \lambda \\ \mathbb{VAR}[X] &= \lambda \\ M_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．$t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.3（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \left.\frac{d}{dt}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right|_{t=0} = \lambda \\ \mathbb{E}[X^2] &= \left.\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right|_{t=0} = \left.\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right|_{t=0} + \left.(\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)}\right|_{t=0} \\ &= \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \lambda$$

がわかる． □

分布	母数	確率関数 $P(X=x)$	平均	分散
ベルヌーイ分布	$0<p<1$	$p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,\,1$	p	$p'1-p)$
二項分布	$n\geq 1,\,0<p<1$	$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$ ただし，$x=0,\,1,\,\ldots,\,n$	np	$np(1-p)$
幾何分布	$0<p<1$	$p(1-p)^{x-1}$ ただし，$x=1,\,2,\,\ldots$	$\dfrac{p}{1-p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
負の二項分布	$n\geq 1,\,0<p<1$	$\begin{pmatrix} n+x-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n(1-p)^x$ ただし，$x=1,\,2,\,\ldots$	$n\dfrac{p}{1-p}$	$n\dfrac{1-p}{p^2}$
ポアソン分布	$0<\lambda<\infty$	$\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$, $x=0,\,1,\,2,\,\ldots$	λ	λ

2　連続型確率変数のモデル

一様分布　確率変数 X が区間 $(\alpha,\,\beta)$ の一様分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/(\beta-\alpha), & (\alpha<x<\beta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．この分布を $U(\alpha,\,\beta)$ と記すことにする．

定理 2.6 (一様分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} \end{aligned}$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x\,dx = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} x^2\,dx = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} \end{aligned}$$

となることから

$$\mathbb{VAR}[X]=\mathbb{E}[X^2]-\{\mathbb{E}[X]\}^2=\frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)}-\left\{\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}^2=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

となる．　□

正規分布 $(N(\mu, \sigma^2)$ 確率変数 X が母数 (μ, σ^2) の正規分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

を持つときをいう．

ただし，$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ である．

特に，$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ のとき，正規分布 $N(0, 1)$ のことを**標準正規分布**という．

定理 2.7 (正規分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mu \\
\mathbb{VAR}[X] &= \sigma^2 \\
M_X(t) &= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \qquad -\infty < t < \infty
\end{aligned}$$

証明 まず，Z が標準正規分布に従うとき，$X = \sigma Z + \mu$ とおくと X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うことを示す．$g(z) = \sigma z + \mu$ と $g^{-1}(x) = (1/\sigma)(x-\mu)$ として命題 1.13 を用いると

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= f_Z(g^{-1}(x))\left|\frac{d}{dx}g^{-1}(x)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\left|\frac{1}{\sigma}\right| \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}$$

となり，X は $N(\mu, \sigma^2)$ に従うがわかった．Z の確率密度関数を $f_Z(z) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$ とおくことにする．つぎに，期待値の線形性と分散の性質より

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sigma\mathbb{E}[Z] + \mu \\
\mathbb{VAR}[X] &= \sigma^2\mathbb{VAR}[Z]
\end{aligned}$$

となることに注意する．$zf_Z(z)$ は奇関数であるので，

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} zf_Z(x)\,dz = 0$$

がわかる．また， $z^2 f_Z(z)$ は偶関数であることと部分積分の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathbb{VAR}[Z] &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(x)\,dz = 2\int_0^{\infty} z^2 f_Z(x)\,dz \\
&= 2\int_0^{\infty} z(-f_Z(z))'\,dz \\
&= 2\left\{[-zf_Z(z)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f_Z(z)\,dz\right\} = 1
\end{aligned}
$$

がわかる．最後の等号は $\lim_{z\to\infty} zf_Z(z) = 0$ と $f_Z(z)$ は偶関数であることからわかる．

最後に，Z の積率母関数を求める：

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right\}dx \\
&= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right\}dz = e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[e^{t(\sigma Z+\mu)}] = e^{\mu t}\mathbb{E}[e^{\sigma tZ}] = e^{\mu t}M_Z(\sigma t) \\
&= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

□

指数分布 $(EX(\lambda))$ 確率変数を X が母数 λ の指数分布に従うとは，X が確率密度関数

$$
f_X(x|\,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}
$$

を持つときをいう．

ただし，$0 < \lambda < \infty$ である．この分布を $Ex(\lambda)$ と記すことにする．

定理 2.8 (指数分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{VAR}[X] &= \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad -\infty < t < \lambda \end{aligned}$$

証明 まず，積率簿関数を求める．$t < \lambda$ に対して，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\lambda)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\lambda)\,dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.3（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{d}{dt} M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\bigg|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

がわかる．

直接，積分を計算して積率をもとめてみよう：まず，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x|\,\lambda)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = -\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} + 1 = 1$$

に注意する．これと部分積分より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|\,\lambda)\,dx \\ &= \int_0^{\infty} x(-\lambda e^{-\lambda x})'\,dx \\ &= \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx \\ &= -\lim_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

再度，上の結果と部分積分を持ちいれば，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x|\,\lambda)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} x^2(-\lambda e^{-\lambda x})'\,dx \\
&= \Big[-x^2 e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} xe^{-lambdax}\,dx \\
&= -\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

□

ガンマ分布　確率変数 X が母数 α, β のガンマ分布に従うとは，X が確率密度関数

$$f_X(x|\,\alpha,\,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta), & (0 < x < \infty) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つときをいう．この分布を $GA(\alpha,\,\beta)$ と記すことにする．

特に，$\alpha = n/2, (n \in \mathbb{N})$ と $\beta = 1/2$ のとき，ガンマ分布 $GA(n/2,\,1/2)$ を自由度 n のカイ自乗分布という．ただし，$0 < \alpha, \beta < \infty$ である．

注意 2.1 $\beta = 1/\lambda$ と $\alpha = 1$ のとき，指数分布になる．

定理 2.9 (ガンマ分布の平均・分散・積率母関数)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\
\mathbb{VAR}[X] &= \alpha\beta^2 \\
M_X(t) &= (1-\beta t)^{-\alpha}, \qquad t < 1/\beta
\end{aligned}$$

証明　まず，積率簿関数を求める．

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta)\,dx = 1$$

に注意する．$t < 1/\beta$ に対して，

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\alpha,\,\beta)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x|\,\alpha,\,\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\lambda\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x(1-\beta t)/\beta)\,dx = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

となることがわかる．つぎに，定理 1.3（積率母関数と積率の関係）を用いると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\alpha\beta}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\bigg|_{t=0} = \alpha\beta \\ \mathbb{E}[X^2] &= \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\bigg|_{t=0} = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1-\beta t)^{\alpha+2}}\bigg|_{t=0} = \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

となり，

$$\mathbb{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \alpha\beta^2$$

がわかる． □

分布	母数	確率密度関数	平均	分散
一様分布	$\alpha,\,\beta\,(\alpha<\beta)\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)},\ \alpha<x<\beta$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$
標準正規分布	なし	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, x\in\mathbb{R}$	0	1
正規分布	$\mu\in\mathbb{R},\,\sigma^2>0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2
指数分布	$\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
ガンマ分布	$\alpha,\,\beta>0$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp(-x/\beta),\ x>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
カイ自乗分布	$n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}e^{-x/2}x^{(n/2)-1},\ x>0$	n	$2n$