今野　(2004 年 4 月 14 日)

統計解析演習の問題 (その１)

問題 1　ジョーカーを除く 52 枚のトランプからカードを 1 枚無作為に抜き取る試行をし，組み札に注目するとする：クラブ (C)，ダイヤ (D)，ハート (H)，スペード (S)．したがって，標本空間は

$$\Omega = \{\mathrm{C, D, H, S}\}$$

である．事象 A, B を

$$A = \{\mathrm{C, D}\}, \qquad B = \{\mathrm{D, H, S}\}$$

としたとき，つぎの事象を求めよ．

(1)　$A \cup B$

(2)　$A \cap B$

(3)　A^c

問題 2　分配法則とド・モルガンの法則を示せ．

ヒント：　$A \subset B \iff$ 任意の $\omega \in A$ に対し, $\omega \in B$
　　　　$A = B \iff A \subset B$　かつ　$B \subset A$

問題 3　つぎの等式を示せ．このとき，

(1)　$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(2)　$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

ヒント：事象 A に含まれる根元事象であって事象 B には含まれないものの全体のつくる事象を，A, B の差といい，$A \setminus B$ と記すことにする：

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in \Omega \quad \text{かつ} \quad \omega \notin B\}$$

問題 4　$a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$ とする．$\mathbb{R}$ の部分集合に関するつぎの等式を確かめよ．

(1)　$\cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n,\, b] = [a,\, b]$

(2)　$\cup_{n=1}^{\infty}(a,\, b - 1/n] = (a,\, b)$

(3)　$\cap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n,\, a] = \{a\}$

(4)　$\cup_{n=1}^{\infty}(-n,\, a] = (-\infty,\, a]$

(5)　$\cup_{n=-\infty}^{\infty}(n,\, n+1] = \mathbb{R}$

ヒント：(1) の等式については，(左辺) $\subset$ (右辺) は明らか．(左辺) $\supset$ (右辺) を示すためには，対偶をとり，$x \notin [a, b]$ ならば，$x \notin$ (右辺) を言えばよい．

$\boxed{\text{問題 5}}$　$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．

(1)　$A, B \in \mathcal{F}$ のとき，$A \cap B \in \mathcal{F}$ と $A \setminus B \in \mathcal{F}$ を示せ．

(2)　$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ のとき，$\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ を示せ．

ヒント：$\{\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c\}^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ を利用せよ．

$\boxed{\text{問題 6}}$　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．確率の性質 (i) – (v) を示せ．

$\boxed{\text{問題 7}}$　事象 A, B が互いに独立のとき，つぎの対も互いに独立であることを示せ．

(1)　A^c, B^c

(2)　A, B^c

(3)　A^c, B

ヒント：$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ を用いて，たとえば，確率の性質 (iii) と (v) を利用して $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ を示せばよい．計算は右辺から始めた方が見通しがいいようだ．

$\boxed{\text{問題 8}}$　サイコロを 2 つ投げる試行を考える．したがって，標本空間は

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$$

である．つぎの事象を考えよう．

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \\ B &= \{\text{ふたつのサイコロの和が 7 以上 10 以下}\} \\ C &= \{\text{ふたつのサイコロの和が 2 または 7 または 8}\} \end{aligned}$$

(1)　$P(A) = 1/6$，$P(B) = 1/2$，$P(C) = 1/3$ を確認せよ．

(2)　$A \cap B \cap C$ を求め，$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ を示せ．

(3)　$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ と $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 9}}$　標本空間 Ω を 3 つの字 $\mathrm{a, b, c}$ を並べたものとする．

$$\Omega = \{\mathrm{aaa, abc, acb, bbb, bca, bac, ccc, cba, cab,}\}$$

ここからどのならびが出現する確率も 1/9 であるとし，事象 A_i, $i = 1, 2, 3$, を

$$A_i = \{\text{字の並びの } i \text{ 番目の字が a}\}$$

とする．

(1)　事象 A_1, A_2, A_3 を求め，$P(A_i) = 1/3$ を確認せよ．

(2)　A_1, A_2, A_3 は対独立であることを示せ．

(3)　A_1, A_2, A_3 は独立でないことを確かめよ．