今野　(2004 年 4 月 28 日)

統計解析演習の問題 (その 2)

$\boxed{\text{問題 10}}$　ふたつの事象 A, B に対して，$P(A) > 0$ ならば

$$P(B|\,A) \geq 1 - \left\{ \frac{P(B^c)}{P(A)} \right\}$$

が成り立つことを示せ.
ヒント：

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \\ A &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ B &= (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

のような互いに排反な事象に分割できることを利用するとよい.

$\boxed{\text{問題 11}}$　A, B, C を事象としたとき，以下を示せ．ただし，条件付けられた事象の確率はすべて正とする.

(i)　$P(B) = 1$ ならば，すべての事象 A に対して，

$$P(A|\,B) = P(A)$$

(ii)　$A \subset B$ ならば，

$$P(B|\,A) = 1$$

かつ

$$P(A|\,B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

(iii)　A と B は互いに排反ならば

$$P(A|\,A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

(iv)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|\,B \cap C)P(B|\,C)P(C)$$

ヒント：(i) まず，$P(A \cap B^c) = 0$ を示し，$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ を利用する.

$\boxed{\text{問題 12}}$　ふたつの事象 A, B に対して

$$\begin{aligned} P(A|\,B) &= \frac{P(A)P(B|\,A)}{P(A)P(B|\,A) + P(A^c)P(B|\,A^c)} \\ P(A^c|\,B) &= \frac{P(A^c)P(B|\,A^c)}{P(A)P(B|\,A) + P(A^c)P(B|\,A^c)} \end{aligned}$$

を示せ．ただし，条件付けられた事象の確率はすべて正とする．

$\boxed{\text{問題 13}}$　3つの箱がある：箱 1 には赤玉が 1 つと白玉が 3 つ，箱 2 には赤玉が 2 つと白玉が 2 つ，箱 3 には赤玉が 3 つと白玉が 1 つはいっている．箱を 1 つ無作為にえらび，選ばれた箱から玉を 1 つ取る．赤玉が取られたときに，箱 1 が選ばれた条件付き確率を求めよ．

<u>ヒント</u>：事象 $A_i,\, i = 1,\, 2,\, 3$ を「箱 i を選ぶ」とし，事象 B を「赤玉が取られる」とし，B^c を「白玉が取られる」とおいてとき，$P(A_1|\, B)$ を求めればよいことになる．$P(A_i)$ および $P(B|\, A_i)$ の確率は題意から簡単に計算できるので，ベイズの定理を使えばよい．

今野　(2004 年 4 月 28 日)

統計解析演習の問題 (その 3)

$\boxed{\text{問題 14}}$　正しい硬貨を 2 回投げる試行を考える：表を H，裏を T と書けば，

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

となる $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合 (2^4 個の事象から構成される) となる．確率変数 X を表の出た回数とする：

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & (\omega = TT) \\ 1, & (\omega = HT, TH) \\ 2, & (\omega = HH) \end{cases}$$

である．このとき，X の分布関数を求め，そのグラフを描け．

$\boxed{\text{問題 15}}$

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

は分布関数の条件をみたしていることを確認し，そのグラフを描け．

$\boxed{\text{問題 16}}$　確率変数 X は分布関数

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \dfrac{1}{2}x & (0 \leq x < 2), \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

をもつとする．さらに，$Y = X^2$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$F_X(x)$ のグラフを描き，分布関数の条件をみたすことを確認せよ．

(2)　$P_X((1/2, 3/2]) = P\left(\dfrac{1}{2} < X \leq \dfrac{3}{2}\right)$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 17}}$　つぎの関数を考える：

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}, & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(1)　$f_X(\cdot)$ は確率関数の条件をみたすことを示せ．

(2)　確率変数 X が確率関数 $f_X(x)$ を持つとき，$P(4 \leq X \leq 7)$ を求めよ．

$\boxed{\text{問題 18}}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(1-x)}{a}, & (0 < x < 1), \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする.

(1) $f(x)$ が確率密度関数となるように a を定めよ.

(2) 確率変数 X が (1) で求めた確率密度関数を持つとき，その分布関数を求めよ.

(3) 確率変数 X が (1) で求めた確率密度関数を持つとき，$P(X \leq 1/2)$ を求めよ.

$\boxed{\text{問題 19}}$ $F_X(\cdot)$ を連続型確率変数 X の分布関数とし，$f_X(\cdot)$ をその確率密度関数とし，x_0 を $F(x_0) < 1$ なる固定された点とする．このとき，

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/[1-F(x_0)] & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

は確率密度関数となることを示せ.