

統計解析演習の問題 (その 3)

問題 14 正しい硬貨を 2 回投げる試行を考える：表を H ，裏を T と書けば，

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

となる \mathcal{F} は Ω のすべての部分集合 (2^4 個の事象から構成される) となる．確率変数 X を表の出た回数とする：

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & (\omega = TT) \\ 1, & (\omega = HT, TH) \\ 2, & (\omega = HH) \end{cases}$$

である．このとき， X の分布関数を求め，そのグラフを描け．

問題 15

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

は分布関数の条件をみたしていることを確認し，そのグラフを描け．

問題 16 確率変数 X は分布関数

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ \frac{1}{2}x & (0 \leq x < 2), \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

をもつとする．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) $F_X(x)$ のグラフを描き，分布関数の条件をみたすことを確認せよ．
- (2) $P_X((1/2, 3/2]) = P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right)$ を求めよ．

問題 17 つぎの関数を考える：

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}, & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

- (1) $f_X(\cdot)$ は確率関数の条件をみたすことを示せ．
- (2) 確率変数 X が確率関数 $f_X(x)$ を持つとき， $P(4 \leq X \leq 7)$ を求めよ．

問題 18

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(1-x)}{a}, & (0 < x < 1), \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする .

- (1) $f(x)$ が確率密度関数となるように a を定めよ .
- (2) 確率変数 X が (1) で求めた確率密度関数を持つとき , その分布関数を求めよ .
- (3) 確率変数 X が (1) で求めた確率密度関数を持つとき , $P(X \leq 1/2)$ を求めよ .

問題 19 $F_X(\cdot)$ を連続型確率変数 X の分布関数とし , $f_X(\cdot)$ をその確率密度関数とし , x_0 を $F(x_0) < 1$ なる固定された点とする . このとき ,

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/[1 - F(x_0)] & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

は確率密度関数となることを示せ .

統計解析演習の問題 (その 4)

問題 20 X を連続型確率変数とし, a, b を定数とする.

- (i) 期待値の性質 (i), (ii), (iv) を示せ.
- (ii) $P(X \geq a) = 1$ ならば, $\mathbb{E}[X] \geq a$ を示せ.
- (iii) $P(X \leq b) = 1$ ならば, $\mathbb{E}[X] \leq b$ を示せ.

問題 21 X を離散型確率変数とし, 確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & (x = 1, 2, 3), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする.

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.
- (ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ.
- (iii) $Y = 3X^2 - 1$ としたとき, $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ.
- (iv) X の分布関数を求め, グラフに描け.

問題 22 X を連続型確率変数とし, 確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする.

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.
- (ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ.
- (iii) $Y = -3X + 10$ としたとき, $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ.
- (iv) X の分布関数を求め, グラフに描け.

問題 23 X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とし, a, b を定数とする. このとき, 以下を示せ.

- (i) $\text{VAR}[a] = 0$.
- (ii) $\text{VAR}[aX + b] = a^2 \text{VAR}[X]$