2004 年 6 月 9 日（今野）

5 月 21 日出題のレポートのコメント（その２）

問題 24　– 期待値の中を展開し，期待値の線形性を使うと

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E}[(X-t)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2tX + t^2] = t^2 - 2\mathbb{E}[X]t + \mathbb{E}[X^2] = (t - \mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 \\ &\geq \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 \end{aligned}$$

となる．最後の不等号は，最右辺の 1 項目（t に関係する唯一の項）は非負であることからわかる．

問題 25

– 分布関数について

X の分布関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ は $\mathbb{R}$ 上の非減少関数である．

問いの確率密度関数から分布関数を求める．$x < -1$ のとき，$f_X(x) = 0$ に注意すれば，

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0$$

となる．$-1 \leq x \leq 1$ のとき，$f_X(x) = 1/2$ に注意して，

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} f_X(t)\,dt + \int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

となる．$x > 1$ のとき，$f_X(x) = 0$ に注意して，

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f_X(t)\,dt + \int_{1}^{x} f_X(t)\,dt = F_X(1) = 1$$

となる．したがって，

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

となる．

– 利用すること

X を連続型確率変数とし，f_X をその確率密度関数とし，$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ 上で連続とする．このとき，$Y = g(X)$ の確率密度関数を求める．

(ii)　$\{\mathcal{X}_i\}_{i=0}^{k}$ を $\mathcal{X}$ の分割[1]とし，$P(X \in \mathcal{X}_0) = 0$ とし，$f_X(\cdot)$ は各 $\mathcal{X}_i, (i = 1, 2, \ldots, k)$ 上で連続とする．さらに，各 $\mathcal{X}_i, (i = 1, 2, \ldots, k)$ 上で定義された関数 $g_i(\cdot)$ が存在して，$x \in \mathcal{X}_i$ に対し，$g(x) = g_i(x)$ が成立し，$g_i(x)$ は $\mathcal{X}_i$ 上で狭義単調関数とし，$g_i^{-1}(\cdot)$ は $\mathcal{Y} \setminus g(\mathcal{X}_0)$ 上で定義され，連続微分可能とする．このとき，

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|, & (y \in \mathcal{Y} \setminus g(\mathcal{X}_0)), \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

[1] すなわち，$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset \, (i \neq j)$ かつ $\mathcal{X} = \cup_{i=0}^{k} \mathcal{X}_i$

ここでは，$k=2$，$\mathcal{X}_0=\{0\}$, $\mathcal{X}_1=(-\infty,0)$, $\mathcal{X}_2=(0,\infty)$ および $\mathcal{Y}\backslash g(\mathcal{X}_0)=(0,1)$ とし，$y\in(0,1)$ に対し，$g_1^{-1}(y)=-\sqrt{y}$ と $g_2^{-1}(y)=\sqrt{y}$ とおいて[2]上の公式を適用する．そうすると $y\in(0,1)$ のとき，

$$\left|\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}},\qquad f_X(g_i^{-1}(y))=\frac{1}{2}$$

となるので，

$$\sum_{i=1}^{2}f_X(g_i^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

となる．したがって，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}} & (0<y<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となることがわかる．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_Y(y)\,dy=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy=1$$

よりどうやら確率密度関数らしいこともわかる．

– 別解

$Y=X^2$ の分布関数 $F_Y(y)=\mathbb{P}(Y\le y)$ を求める．そのために，Y の定義より $y\le 0$ のとき，$F_Y(y)=0$ となるので，$y\ge 0$ として，$F_Y(y)$ を求めよう．$y>0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y\le y)&=\mathbb{P}(X^2\le y)\\&=\mathbb{P}((\{X^2\le y\}\cap\{X<0\})\cup(\{X^2\le y\}\cap\{X=0\})\cup(\{X^2\le y\}\cap\{X<0\}))\\&=\mathbb{P}(\{X^2\le y\}\cap\{X<0\})+\mathbb{P}(\{X^2\le y\}\cap\{X=0\})+\mathbb{P}(\{X^2\le y\}\cap\{X<0\})\\&=\mathbb{P}(-\sqrt{y}\le X<0)+\mathbb{P}(0<X\le\sqrt{y})\\&=\mathbb{P}(-\sqrt{y}<X\le 0)+\mathbb{P}(0<X\le\sqrt{y})\\&=F_X(0)-F_X(-\sqrt{y})F_X(\sqrt{y})-F_X(0)\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

となる．$0<y<1$ のとき，$(d/dy)F_X(x)=1/2$ に注意して，合成関数の微分の公式[3]を用いると

$$\frac{d}{dy}\{F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

を確認すればよい．

[2] $g_1(x)=x^2\ (x\ in(-\infty,0))$ と $g_2(x)=x^2\ (x\in(0,\infty))$ とおいている．すなわち，
[3] $z=F_X(x)$, $x=\pm\sqrt{y}$ として，

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

を意識的にきちんと適用すること．