2004 年 6 月 16 日（今野）

6 月 9 日出題のレポートのコメント（その１）

問題 28 – 周辺確率関数や周辺確率密度関数を求めたときには，$\sum f_X(x) = 1$ や $\int f_X(x)\,dx = 1$ が成立しているか確認すると簡単な計算ミスや勘違いを発見できる．問題 29 の XY と $X+Y$ の周辺確率関数および条件付確率関数も同様である．

問題 29 – $X+Y$ の周辺分布について

$S_x = \{1, 2, 3, 4\}$ と $S_x = \{1, 2, 3, 4\}$ に注意する．したがって，$X+Y$ の取りうる値は $S_{x+y} := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ となる．各 $k \in S_{x+y}$ に対して，

$$\mathbb{P}(X+Y = k) = \mathbb{P}(\cup_{y=1}^{4}[\{X = k-y\}\cap\{Y = y\}]) = \sum_{y=1}^{4}\mathbb{P}(\{X = k-y\}\cap\{Y = y\}) = \sum_{y=1}^{4} f_{X,\,Y}(k-y,\,y)$$

となることに注意する．

– $\mathbb{E}[X+Y]$ について

期待値の定義と周辺分布の定義から

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_{x,\,y}(x+y)f_{X,\,Y}(x,\,y) = \sum_{x,\,y} x f_{X,\,Y}(x,\,y) + \sum_{x,\,y} y f_{X,\,Y}(x,\,y)\\ &= \sum_{x} x(\sum_{y} f_{X,\,Y}(x,\,y)) + \sum_{y} y(\sum_{x} f_{X,\,Y}(x,\,y)) = \sum_{x} x f_X(x) + \sum_{y} y f_Y(y)\end{aligned}$$

となるとなることに注意する．

– XY の周辺分布について

XY の取りうる値は $S_{xy} := \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$ となる．各 $k \in S_{xy}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(XY = k) &= \mathbb{P}\big(\cup_{y=1}^{4}[\{X = \frac{k}{y}\}\cap\{Y = y\}]\big) = \sum_{y=1}^{4}\mathbb{P}\big(\{X = \frac{k}{y}\}\cap\{Y = y\}\big)\\ &= \sum_{y=1}^{4} f_{X,\,Y}\big(\frac{k}{y},\,y\big)\end{aligned}$$

となることに注意する．ただし，$\frac{k}{y} \notin S_x$ のときにはそれに対応する $f_{X,\,Y}(k/y,\,y)$ の値は 0 になる．

– $\mathbb{E}[XY]$ について

まず，定義 3.7 に従い素直に考えれば，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,\,y)\in S} xy f_{X,\,Y}(x,\,y)\\ &= 1\times 1\times f_{X,\,Y}(1,\,1) + 1\times 2\times f_{X,\,Y}(1,\,2) + \cdots + 4\times 4\times f_{X,\,Y}(4,\,4)\end{aligned}$$

となる．これを直接計算すればよい．しかし，XY の周辺確率関数をすでに求めているので，$Z = XY$ とおけば，上から Z の確率関数 $f_Z(z)$ がわかる．したがって，期待値の定義から

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Z] = \sum_{z\in S_{xy}} z f_Z(z)$$

となることからも求まる．

- $f_{X,Y}(x,y)$ と $f_{X|Y}(x|y)$ の記法について
  $f_{X,Y}(x,y)$ は (x,y) の 2 変数関数．$f_{X|Y}(x|y)$ は x の 1 変数関数です．$f_{X|Y}(x|y)$ や $\mathbb{E}[X|y]$ と書いたときには，基本的な概念は $|$ の前の変数についてであることを意味します．$f_{X|Y}(x|y)$ は $Y=y$ が与えられたときの X の条件付確率関数（確率密度関数）であり，$\mathbb{E}[X|y]$ は $Y=y$ が与えられたときの X の条件付期待値である．なお，$\mathbb{E}[X,Y]$ と書いたときは $\mathbb{E}[X,Y]=(\mathbb{E}[X],\mathbb{E}[Y])$ でベクトルの意味である．

- 条件付き確率関数について
  $x=1$ のとき，
  $$f(y|1)=\frac{1}{4}\qquad(y=1,2,3,4)$$
  となる．$x=2$ のとき，
  $$f(y|2)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (y=2)\\ \frac{1}{4} & (y=3,4)\end{cases}$$
  となる．$x=3$ のとき，
  $$f(y|3)=\begin{cases}\frac{3}{4} & (y=3)\\ \frac{1}{4} & (y=4)\end{cases}$$
  となる．$x=4$ のとき
  $$f_X(y|4)=1\qquad(y=4)$$
  となる．したがって，$\mathbb{E}[Y|x]$ は x に具体的な値を入力すれば，ひとつの値を出力する．すなわち，x の関数となる．よって，入力 x に対して，出力 $\mathbb{E}[Y|x]$ が対応するので，$\mathbb{E}[Y|x]$ は x の関数だから，$g(x):=\mathbb{E}[Y|x]$ とおくことにする．

- 条件付き期待値について
  $\mathbb{E}[Y|x]$ を $x=1,2,3,4$ のそれぞれの場合について求める．$x=1$ のとき，
  $$\mathbb{E}[Y|1]=\sum_y y f_{Y|X}(y|1)=\frac{10}{4}$$
  となることに注意する．$x=2$ のとき，
  $$\mathbb{E}[Y|2]=\sum_y y f_{Y|X}(y|2)=\frac{11}{4}$$
  となることに注意する．$x=3$ のとき，
  $$\mathbb{E}[Y|3]=\sum_y y f_{Y|X}(y|2)=\frac{13}{4}$$
  となることに注意する．$x=4$ のとき，
  $$\mathbb{E}[Y|4]=\sum_y y f_{Y|X}(y|2)=4$$
  となることに注意する．

- 条件付期待値の記号の約束について
  $g(x)=\mathbb{E}[Y|x]$ とおく．ここで，$g(X)$ は x の関数 $g(x)$ に入力として確率変数 X を入れもので X に依存する確率変数と考え，$g(X)$ のことを $\mathbb{E}[Y|X]:=g(X)$ とかくことにする．注意すべきことは，条件付期待値は記号 $\mathbb{E}$ をつかっているが，

$\boxed{\mathbb{E}[Y|\,X] \text{ は確率変数 } X \text{ に依存する確率変数}}$

である．一方，$\underline{\mathbb{E}[Y|\,x] \text{ は変数 } x \text{ の関数である}}$．したがって，$x$ に具体的な値を代入すれば，$\mathbb{E}[Y|\,x]$ は具体的な値をなる．

– $\underline{\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\,X)] = \mathbb{E}[Y] \text{ について}}$

まず，$g(X)$ の期待値を定義に従い書きくだせば，

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=1}^{4} g(x) f_X(x) = g(1)f_X(1) + g(2)f_X(2) + g(3)f_X(3) + g(4)f_X(4)$$

となる．上の式に $g(X) = \mathbb{E}(Y|\,X)$ と $g(x) = \mathbb{E}(Y|\,x)$ を代入して $\mathbb{E}(Y|\,x)\,(x = 1, 2, 3, 4)$ の値から

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\,X)] &= \sum_{x=1}^{4} \mathbb{E}(Y|\,x) f_X(x) \\
&= \mathbb{E}(Y|\,1)f_X(1) + \mathbb{E}(Y|\,1)f_X(1) + \mathbb{E}(Y|\,1)f_X(1) + \mathbb{E}(Y|\,1)f_X(1) \\
&= \frac{25}{8} = \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

となる．