今野　(2004 年 6 月 23 日)

統計解析演習の問題 (その８)

$\boxed{\text{問題 38}}$　X と Y の同時確率密度関数が

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}4xy-2x-2y+2 & (0<x,y<1),\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

で与えられとする.

(i) Y の平均と分散を求めよ.

(ii) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$$

を確認せよ.

(iii) X と Y の共分散と相関係数を求めよ.

(iv) $\hat{Y}=\mathbb{E}[Y|X]$ を求めよ.（ヒント：答えは X の関数となる．また，$\mathbb{E}[Y|X]$ は $g(x)=\mathbb{E}[Y|x]$ としたとき，$\mathbb{E}[Y|X]=g(X)$ で定める．）

(v) $\widetilde{Y}=a+bX$ （a と b は定数）としてとき、$\mathbb{E}[\{\widetilde{Y}-Y\}^2]$ を最小にする a と b を $\mathbb{E}[X]$、$\mathbb{E}[Y]$、$\mathbb{E}[XY]$、および $\mathbb{E}[X^2]$ で表現した後、それを求めよ .

$\boxed{\text{問題 39}}$　X と Y は互いに独立な確率変数でそれぞれは正規分布 $N(0,1)$ と $N(0,4)$ に従うとする.

$$U=X+Y,\qquad V=X-Y$$

とおく.

(i) U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,v)\,du\,dv=1$$

を確認せよ.

(ii) U と V の分散共分散行列

$$\begin{pmatrix}\mathbb{VAR}[U] & \mathbb{COV}[U,V]\\ \mathbb{COV}[U,V] & \mathbb{VAR}[V]\end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ.

$\boxed{\text{問題 40}}$ X と Y 互いに独立な確率変数でそれぞれは標準正規正規分布に従うとし，

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$$

とおく．

(i) U と V の期待値と U と V の分散共分散行列

$$\begin{pmatrix} \mathbb{VAR}[U] & \mathbb{COV}[U,\, V] \\ \mathbb{COV}[U,\, V] & \mathbb{VAR}[V] \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(ii) U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 41}}$ 確率変数 X と Y は同時確率密度関数

$$f_{X,Y}(x,\, y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1,\, 0<y<1, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．

(i) $U = X+Y, V = X$ とおく．U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ．

(ii) U の周辺確率密度関数 $f_U(u)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)\, du = 1$$

を確認せよ．

(iii) $Z = XY$ とおく．Z と X の同時確率密度関数 $f_{Z,X}(z,\, x)$ を求めよ．さらに

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f_{Z,X}(z,\, x)\, dz\, dx = 1$$

を確認せよ．

(iv) Z の周辺確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)\, dz = 1$$

を確認せよ．

(v) $T = X/Y$ とおく．T と Y の同時確率密度関数 $f_{T,Y}(t,\, y)$ を求めよ．さらに

$$\int\!\!\int_{\mathbb{R}^2} f_{T,Y}(t,\, y)\, dt\, dy = 1$$

を確認せよ．

(vi) T の周辺確率密度関数 $f_T(t)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\, dt = 1$$

を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 42}}$ X と Y は独立同一の分布に従い，それぞれは確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

を持つとする．

(i) $V = X + Y, U = Y$ としたとき，U と V の同時確率密度関数 $f_{U,V}(u,\, v)$ を求めよ．さらに

$$\int\!\!\int_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(u,\, v)\, du\, dv = 1$$

を確認せよ．

(ii) V の周辺確率密度関数 $f_V(v)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v)\, dv = 1$$

を確認せよ．

(iii) $W = X/Y$ とおく．W と Y の同時確率密度関数 $f_{W,Y}(w,\, y)$ を求めよ．さらに

$$\int\!\!\int_{\mathbb{R}^2} f_{W,Y}(w,\, y)\, dw\, dy = 1$$

を確認せよ．

(iv) W の周辺確率密度関数 $f_W(w)$ を求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_W(w)\, dw = 1$$

を確認せよ．

$\boxed{\text{問題 43}}$ 連続型確率変数 X, Y は同時確率密度関数

(1) $$f_{X,Y}(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(2+x+y+\beta xy) & (-1<x<1,\,-1<y<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする．ただし，β は $0 \le \beta \le 1/2$ なる定数とする．また，$0 \le \beta \le 1/2$ かつ $-1<x<1,\,-1<y<1$ ならば，$f_{X,Y}(x,\,y) \ge 0$ となっていることに注意せよ．この事実の証明は不要とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(i) X と Y の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ をそれぞれ求めよ．さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = 1,$$

を確認せよ．

(ii) XY の期待値 $\mathbb{E}[XY]$ を求めよ．

(iii) X と Y が無相関になるときの β の値を求めよ．

(iv) X と Y が無相関になるとき（すなわち，X と Y の同時確率密度関数が問い (c) で求めた β の値をもつ (1) で与えられるとき)，X と Y は独立であるかどうかを調べよ．

$\boxed{\text{問題 44}}$ 離散型確率変数 X は確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & (x=-1,\,0,\,1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．

(i) X の分布関数 $F_X(x)$ のグラフを描け．

(ii) X の平均 $\mathbb{E}[X]$，X の 2 次と 3 次の原点まわり積率 $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[X^3]$ を求めよ[1]．

(iii) $Y = X^2$ としたとき，X と Y の相関係数を求めよ．

$\boxed{\text{問題 45}}$ 取りうる値の集合が $\{1, 2, 3\}$ である確率変数 X と Y の同時確率分布 $f_{X,Y}(x,\,y)$ が以下のように与えられているとする．以下の問いに答えよ．

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

[1] X の平均 は X の期待値と同じこと．また，X の 2 次の原点まわり積率は X^2 の期待値と同じこと．

(i) X と Y の周辺確率分布 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を求めよ．さらに

$$\sum_x f_X(x) = 1, \qquad \sum_y f_Y(y) = 1$$

を確認せよ．

(ii) $Y = y\,(y = 1,\,2,\,3)$ が与えれたときの X の条件付確率関数 $f_{X|Y}(x|\,y)$ を求めよ．さらに，$Y = y\,(y = 1,\,2,\,3)$ が与えれたときの X の条件付確率関数 $f_{X|Y}(x|\,y)$ が定義される各 y に対して

$$\sum_x f_{X|Y}(x|\,y) = 1$$

を確認せよ．

(iii) $Y = y\,(y = 1,\,2,\,3)$ が与えれたときの X の条件付期待値 $\mathbb{E}[X|\,y]$ を求めよ．

(iv) $g(y) = \mathbb{E}[X|\,y]$ とおいたとき，$g(Y)$ の期待値 $\mathbb{E}[g(Y)]$ を求めよ．