

統計解析演習の問題(その4)

問題 20 X を連続型確率変数とし, a, b を定数とする.

- (i) 期待値の性質 (i), (ii), (iv) を示せ.
- (ii) $P(X \geq a) = 1$ ならば, $\mathbb{E}[X] \geq a$ を示せ.
- (iii) $P(X \leq b) = 1$ ならば, $\mathbb{E}[X] \leq b$ を示せ.

問題 21 X を離散型確率変数とし, 確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & (x = 1, 2, 3), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする.

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.
- (ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ.
- (iii) $Y = 3X^2 - 1$ としたとき, $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ.
- (iv) X の分布関数を求め, グラフに描け.

問題 22 X を連続型確率変数とし, 確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & (0 < x < 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつとする.

- (i) $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[X^2]$ を求めよ.
- (ii) $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ を求めよ.
- (iii) $Y = -3X + 10$ としたとき, $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]$ を求めよ.
- (iv) X の分布関数を求め, グラフに描け.

問題 23 X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とし, a, b を定数とする. このとき, 以下を示せ.

- (i) $\text{VAR}[a] = 0$.
- (ii) $\text{VAR}[aX + b] = a^2 \text{VAR}[X]$

$$(iii) \quad \text{VAR}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$$

分散の性質 (i) と (ii) を示せ .

問題 24 X を連続型確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とする . $g(t) = \mathbb{E}[(X - t)^2]$ は $t = \mathbb{E}[X]$ で最小となることを示せ . すなわち ,

$$g(t) \geq \text{VAR}[X], \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つ .