今野　(2017 年 01 月 24 日)

情報統計学の試験問題（試験時間は 60 分）

解答上の注意

特別な指示がある場合を除き，答えが合っているかどうかよりも解答の途中過程の論理的展開を重視して採点をします．以下の点に留意して解答を作成すること．

(1) 解答の途中過程は丁寧に記述すること．

(2) 設問中で証明することを求めていない場合には，講義で述べたことは証明なしに用いてよい．しかし，何をどのように用いたかを可能な限り明示すること．

(3) 各自が理解していることが採点者にわかるよう答案を作成すること．

(4) 等号の使い方に注意すること．

(5) 問題は裏面にもあります．

問題 1　離散型確率変数 X は母数 $\theta\,(0<\theta<1)$ のベルヌーイ分布に従うとする．

$$\mathbb{P}_\theta(X=x)=f_X(x|\,\theta)=\begin{cases}\theta & (x=1),\\ 1-\theta & (x=0),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 推定量 $t_1=t_1(X)=X$ は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(2) 推定量 t_1 の平均自乗誤差 $\mathrm{MSE}(\theta,\,t_1)=\mathbb{E}_\theta[(t_1(X)-\theta)^2]$ を求めよ．また，θ を横軸，MSE を縦軸としてグラフを描け．

(3) 推定量 $t_2=t_2(X)=\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{4}$ は θ の不偏推定量かどうかを調べよ．

(4) 推定量 t_2 の平均自乗誤差 $\mathrm{MSE}(\theta,\,t_2)=\mathbb{E}_\theta[(t_2(X)-\theta)^2]$ を求めよ．また，(2) のグラフに $\mathrm{MSE}(t_2,\,\theta)$ を描け．

問題 2　$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ を母集団分布 (平均は θ，分散は 1^2 の正規分布)

$$f(x|\,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$$

からの大きさ n のランダム標本とする．ただし，母数 $\theta\,(-\infty<\theta<\infty)$ は未知とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X_1=x_1,\,X_2=x_2,\,\ldots,\,X_n=x_n$ を観測したときの θ の尤度関数 $L_n(\theta|\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ と対数尤度関数 $\ell_n(\theta|\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ を書け．

(2) θ の最尤推定値 $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を求めよ.

(3) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の平均 $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ を求めよ.

(4) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の分散 $\mathbb{VAR}[\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$ を求めよ.

(5) 任意の正数 ϵ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| \geq \epsilon) = 0$$

を示せ.