統計解析の備忘録　今野 良彦 (2019.10.01)

確率の公理 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$

(P1) 任意の事象 $A \in \mathscr{A}$ に対して，$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
(P3) 互いに排反な $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) に対して，

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots$$

確率 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ の性質

(1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
(3) $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
(4) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
(5) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

条件付き確率 $\mathbb{P}_B(A)$

$\mathbb{P}(B) \neq 0$ のとき，

$$\mathbb{P}(A|\, B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathscr{A}.$$

条件付き確率と独立性

$$\begin{aligned} A \text{ と } B \text{ は独立} &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|\, B) = \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

ベイズの定理

$A_1 \cup A_2 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とする．$\mathbb{P}(B) \neq 0$ のとき，

$$\mathbb{P}(A_k|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|\, A_k)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|\, A_)) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_2|\, B)}\ (k = 1, 2).$$

累積関数 $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ の性質

(D1) $x_1 < x_2 \Longrightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
(D2) $\lim_{h \to +0} F_X(x+h) = F_X(x)$.
(D3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

離散型確率変数 X の確率関数 $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ の定義

(1) $f_X(x_k) \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots$
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(x_k) = 1$.

連続型確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ の定義

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$.

連続型確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ の性質

(1) $f_X(x) \geq 0$.
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.
(3) $F_X(x)$ が微分可能なとき，$f_X(x) = \dfrac{d}{dx} F_X(x)$.

確率変数 X の期待値の定義

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_X(x_k) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dt & \text{(連続型)} \end{cases}$$

確率変数 $\varphi(X)$ の期待値の定義 ($\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) f_X(x_k) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx & \text{(連続型)} \end{cases}$$

確率変数 X の期待値の性質

(1) a, b は定数とする．このとき，$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

確率変数 X の分散の定義の性質

def: $\mu := \mathbb{E}[X]$ としたとき，$\mathbb{VAR}(X) := \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$.
(1) $a \neq 0$, b は定数としたとき，$\mathbb{VAR}(aX + b) = a^2 \mathbb{VAR}(X)$.
(2) $\mathbb{VAR}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \{\mathbb{E}[X]\}^2$.

確率変数 X の基準化

$Z := \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{VAR}[X]}}$ ($\mathbb{VAR}[X] > 0$) としたとき，

$$\mathbb{E}[Z] = 1;\ \mathbb{VAR}[Z] = 1.$$

チェビシェフ の不等式

$0 < \mathbb{VAR}[X] < \infty$ とする．このとき，

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{VAR}[X]}{\epsilon^2}, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

確率ベクトル (X_1, X_2) の分布関数

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

確率ベクトル (X_1, X_2) の分布関数の性質

(1) 非減少性：$s_1 < t_1$, $s_2 < t_2$ ならば，

$$F_{X_1, X_2}(s_1, t_1) \leq F_{X_1, X_2}(s_2, t_2).$$

(2) 右連続性：$F_{X_1, X_2}(s_2, t_2)$.

$$= \lim_{h_1 \to +0,\, h_2 \to +0} F_{X_1, X_2}(x_1 + h_1, x_2 + h_2).$$

(3) 有界性：

$$\lim_{x_2 \to -\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2). = 0.$$

$\lim_{x_1 \to -\infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2). = 0.$

$$\lim_{x_1 \to \infty, x_2 \to \infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2). = 1.$$

離散型確率ベクトル (X_1, X_2) の同時確率関数の定義

(X_1, X_2) の取る値が高々可算個の要素からなる集合 $D := \{(x_{1i}, x_{2j}), i, j = 1, 2, \ldots\}$ のとき，

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) & ((x_1, x_2) \in D); \\ 0 & ((x_1, x_2) \notin D) \end{cases}$$

離散型確率ベクトル (X_1, X_2) の同時確率関数の性質

(1) $f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2j}) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$;
(2) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2j}) = 1$.

連続型確率ベクトル (X_1, X_2) の同時確率密度関数の定義

$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1, X_2}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$.
特に，$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ の連続点において，

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2).$$

連続型確率ベクトル (X_1, X_2) の同時確率密度関数の性質

(1) $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq 0$;
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$.

周辺分布関数の定義

$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$;
$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$

周辺確率関数の定義

$f_{X_1}(x_1) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_{2j})$;
$f_{X_2}(x_2) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_2)$.

周辺確率密度関数の定義

$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_2$;
$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1$.

確率変数の独立性の定義

$$\begin{aligned} X_1 \text{ と } X_2 \text{ は独立} & \\ &\Longleftrightarrow F_{X_1, X_2} = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Longleftrightarrow f_{X_1, X_2} = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

確率変数 $\varphi(X_1, X_2)$ の期待値の定義 ($\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, X_2)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(x_{1i}, x_{2j}) f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2j}) & \text{(離散型)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 & \text{(連続型)} \end{cases}$$

確率変数 X の期待値の性質

(1) $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$;
(2) $\mathbb{VAR}(X_1 + X_2) = \mathbb{VAR}(X_2) + \mathbb{VAR}(X_2) + 2\mathbb{COV}(X_1, X_2)$.
(3) X_1 と X_2 が独立のとき，$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

共分散との定義

$\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, $\mathbb{E}[X_2] < \infty$ のとき，

$$\mathbb{COV}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[\{X_1 - \mathbb{E}(X_1)\}\{X_2 - \mathbb{E}(X_2)\}].$$

共分散の性質

(1) $\mathbb{COV}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.
(2) 定数 a, b に対して，

$$\mathbb{COV}(aX_1, bX_2) = ab\mathbb{COV}(X_1, X_2).$$

(3) X_1 と X_2 が独立のとき，

$$\mathbb{COV}(X_1, X_2) = 0.$$

相関係数の定義

$0 < \mathbb{VAR}[X_1] < \infty$, $0 < \mathbb{VAR}[X_2] < \infty$ のとき,

$$\rho(X_1,\, X_2) = \frac{\mathbb{COV}(X_1,\, X_2)}{\sqrt{\mathbb{VAR}(X_1)}\sqrt{\mathbb{VAR}(X_2)}}.$$

相関係数の性質

(1) $-1 \le \rho(X_1,\, X_2) \le 1$;
X_1 と X_2 が独立ならば, $\rho(X_1,\, X_2) = 0$.

モーメント母関数の定義

$M_{(X_1,\, X_2)}(t_1,\, t_2) = \mathbb{E}[\exp(t_1 X_1 + t_2 X_2)]$.

モーメント母関数の性質

(1) $\left.\frac{\partial M_{(X_1,\, X_2)}(t_1,\, t_2)}{\partial t_1}\right|_{(t_1,\, t_2)=(0,\, 0)} = \mathbb{E}(X_1)$;

(2) $\left.\frac{\partial^2 M_{(X_1,\, X_2)}(t_1,\, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{(t_1,\, t_2)=(0,\, 0)} = \mathbb{E}(X_1 X_2)$;

(3) X_1 と X_2 が独立ならば,
$M(X_1,\, X_2)(t_1,\, t_2) = M_{X_1}(t_1) M_{X_2}(t_2)$.

条件付確率（密度）関数の定義

$f_{X_1}(x_1) \ne 0$ なる x_1 に対して,

$$f_{X_2|\, X_1}(x_2|\, x_1) = \frac{f_{(X_1,\, X_2)}(x_1,\, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}.$$

確率変数列の収束のモード

(1) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が定数 c に確率収束するとは,
任意の正数 ϵ に対して, つぎが成立することである：
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X - c| \ge \epsilon) = 0$.
これを $X_n \xrightarrow{P} c$ と書く.

(2) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が分布関数 $F(x)$ に分布収束するとは, $F(x)$ のすべての連続点に対して, つぎが成立する：
$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \le x) = F(x)$.
これを $X_n \xrightarrow{d} F$ と書く.

大数の弱法則

$X_1, X_2, \ldots$ は独立で同一の分布に従い, $\mu := E(X_1)$ は存在するとき,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

中心極限定理

$X_1, X_2, \ldots$ は独立で同一の分布に従い, $0 < \sigma^2 := V(X_1)$ は存在するとき,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}\sigma}\right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2}\, dt\ (n \to \infty).$$

二項分布 $Bi(n,\, p)$ の確率関数

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$$

ポアソン分布 $Po(\lambda)\,(\lambda > 0)$ の確率関数

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad x = 0,\, 1,\, \ldots$$

指数分布 $Exp(\lambda)\,(\lambda > 0)$ の確率関数

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0); \\ 0 & (x \le 0). \end{cases}$$

正規分布 $N(\mu,\, \sigma^2)\,(\sigma > 0)$ の確率関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}.$$

正規分布の積率

(1) $\mathbb{E}(X) = \mu$;
(2) $\mathbb{VAR}(X) = \sigma^2$;
(3) $M_X(t) = \exp\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\}$.

確率変数の変数変換

$Y_1 = \varphi_1(X_1,\, X_2)$, $Y_2 = \varphi_2(X_1,\, X_2)$ とし,
$x_1 = \psi_1(y_1,\, y_2)$, $x_2 = \psi_2(y_1,\, y_2)$ のとき,
$f_{(Y_1,\, Y_2)}(y_1,\, y_2) = f_{(X_1,\, X_2)}(\psi_1(y_1,\, y_2),\, \psi_2(y_1,\, y_2))|J|$. ただし,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

自由度 n の χ^2 分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & (x > 0); \\ 0 & (x \le 0). \end{cases}$$

自由度 n の t 分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, & (x > 0); \\ 0 & (x \le 0). \end{cases}$$

自由度 $(k_1,\, k_2)$ の F 分布

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{k_1/2}}{B(k_1/2,\, k_2/2)} x^{k_1/2-1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2} x\right)^{(k_1+k_2)/2}, & (x > 0); \\ 0 & (x \le 0). \end{cases}$$

ガンマ関数とベータ関数の定義

(1) $a > 0$ に対して, $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$;

(2) $a,\, b > 0$ に対して, $B(a,\, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

ガンマ関数の性質

(1) $a > 0$ に対して, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)x$;
(2) $n = 1,\, 2,\, \ldots$ に対して, $\Gamma(n) = (n-1)!$;
(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

順序統計量

$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ を分布関数 $F_X(x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする. $X_{(1)},\, X_{(2)},\, \ldots,\, X_{(n)}$ を標本の順序統計量としたとき, $X_{(j)},\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$ の確率密度関数は

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) [F_X(x)]^{j-1} [1 - F_X(x)]^{n-j},$$

となる.

順序統計量の同時分布

$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ を分布関数 $F_X(x)$ と確率密度関数 $f_X(x)$ をもつ連続型分布からの標本の大きさが n のランダム標本とする. $X_{(1)},\, X_{(2)},\, \ldots,\, X_{(n)}$ を標本の順序統計量としたとき, $X_{(i)}$ と $X_{(j)},\, 1 \le i < j \le n,$ の同時確率密度関数は

$$f_{X_{(i)},\, X_{(j)}}(u,\, v) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!} f_X(u) f_X(v) [F_X(u)]^{i-1} & \\ \times [F_X(v) - F_X(u)]^{j-i-1} [1 - F_X(v)]^{n-j}, & -\infty < u < v < \infty, \\ 0, & \text{(その他)} \end{cases}$$

となる.