1.8 確率変数の不等式

定理 1.1 （マルコフの不等式） 非負値確率変数 X が有限の期待値 $\mathbb{E}[X] < \infty$ をもつとき，任意の正数 $a > 0$ に対して，

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$$

が成立する．

証明 X が連続型確率の場合を示す．X の確率密度関数を $f_X(x)$ とする．

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx \geq \int_a^\infty x f_X(x)\,dx \geq a\int_a^\infty f_X(x)\,dx = a\,\mathbb{P}(X \geq a)$$

よりわかる． □

定理 1.2 （チェビシェフの不等式） 確率変数 X が平均 μ，分散 σ^2 をもつとき，任意の正数 $a > 0$ に対して，

$$\mathbb{P}\{|X-\mu| \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

が成り立つ．

証明 Markov の不等式から

$$\mathbb{P}\{|X-\mu| \geq a\} = \mathbb{P}\{|X-\mu|^2 \geq a^2\} \geq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{a^2}$$

よりわかる． □

例 1.13 X は平均 μ，分散 $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ の分布に従うとする．このとき，任意の正の実数 t に対して，

$$\mathbb{P}\{|X-\mu| \geq t\sigma\} \leq \frac{1}{t^2}\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma}\right)\right] = \frac{1}{t^2}\frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{\sigma^2} = \frac{1}{t^2}$$

となる．したがって，$t = 2$ の場合

$$\mathbb{P}\{|X-\mu| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{2^2} = 0.25$$

となる．

例 1.14 Z は標準正規分布に従うとする．このとき，任意の正の実数 t に対して，

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq t\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-t^2/2}}{t} \tag{1.2}$$

となる．

$t=2$ のとき，Chebychev の不等式から

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq 2\} \leq \frac{1}{2^2} = 0.25$$

となる．しかし，(1.2) から

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq 2\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-2}}{2} = 0.054$$

となる．また，

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq 3\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-4.5}}{3} = 0.00295$$

となる．

1.2) は以下からわかる．

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Z \geq t\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-z^2/2}\, dz \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{z}{t} e^{-z^2/2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{t} e^{-z^2/2} \right]_t^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t^2/2}}{t}
\end{aligned}$$

と

$$\mathbb{P}\{|Z| \geq t\} = \mathbb{P}\{\{Z \geq t\} \cup \{Z \leq -t\}\} = \mathbb{P}\{Z \geq t\} + \mathbb{P}\{Z \leq -t\} = 2\,\mathbb{P}\{Z \geq t\}$$

からわかる．

ある区間 $I=(a,\,b)$ の上の実数値連続関数 $h(x)$ が凸 (convex)であるとは，任意の $c \in (1,\,0)$ と任意の $x_1,\,x_2 \in I$ に対して，

$$h(cx_1 + (1-c)x_2) \leq ch(x_1) + (1-c)h(x_2)$$

が成り立つことである．もし， $x_1 \neq x_2$ に対して 「$\leq$ 」のかわりに「$<$ 」が常に成立するならば，狭義の凸関数という．

定理 1.3 （イェンセンの不等式） X を確率変数とし，$h(x)$ を X の定義域を含む区間上で凸な関数とする．X と $h(X)$ の期待値が有限のとき，

$$\mathbb{E}[h(X)] \geq h(\mathbb{E}[X])$$

が成立する．もし，$h(x)$ が狭義の凸関数のとき，等号が成り立つのは 1 点分布の時にかぎる．

証明 任意の固定した x_0 とある線形関数 $g(x)=ax+b$ が存在して，$h(x_0)=g(x_0)$ とすべての x に対して $h(x) \geq g(x)$ が成立する．$x_0 = \mathbb{E}[X]$ として，上のことを利用すれば，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)] &\geq \mathbb{E}[g(X)] \\
&= \mathbb{E}[aX+b] \\
&= a\mathbb{E}[X] + b \\
&= g(\mathbb{E}[X]) = h(\mathbb{E}[X])
\end{aligned}$$

□

例 1.15 X を $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ なる確率変数とする．$h(x) = x^2$ とすれば，$h(x)$ は狭義の凸関数なので，Jensen の不等式より

$$\{\mathbb{E}[X]\}^2 = g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[X^2]$$

となる．したがって，

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$$

をえる．

例 1.16 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は正の数とし，

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \qquad \text{（算術平均）}, \\ m_G &= \{a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \qquad \text{（幾何平均）}, \\ m_H &= \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)} \qquad \text{（調和平均）} \end{aligned}$$

とする．このとき，

$$m_H \leq m_G \leq m_A$$

が成立する．

Jensen の不等式を用いて示す：そのために，X を確率変数として

$$\mathbb{P}\{X = a_i\} = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

とする．$\log x$ は凸関数なので，$\mathbb{E}[\log X] \leq \log(\mathbb{E}[X])$ が成立する．したがって，

$$\log m_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a_i = \mathbb{E}[\log X] \leq \log(\mathbb{E}[X]) = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \log m_A$$

より $m_G \leq m_A$ がわかる．また，

$$\log\frac{1}{m_H} = \log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \log\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]\right) \geq \mathbb{E}\left[\log\left(\frac{1}{X}\right)\right] = -\mathbb{E}[\log X] = -\log m_G$$

から $m_G \geq m_H$ がわかる．

定理 1.4 （ヘルダーの不等式） 正数 p, q は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする．$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty, \mathbb{E}[|Y|^q] < \infty$ なる確率変数 X, Y を確率変数に対して，

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \{\mathbb{E}[|X|^p\}^{1/p}\{\mathbb{E}[|Y|^q\}^{1/q}$$

が成立する．ときに，$p = 2, q = 2$ のときの不等式

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]}\sqrt{\mathbb{E}[|Y|^2]}$$

をシュバルツの不等式という．

証明　まず，任意の正の数 a, b に対して，

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{b}b^q \geq ab \tag{1.3}$$

が成立することを示す．ただし，等号成立は $a^p = b^q$ の時に限る．b を固定して，

$$g(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$$

とおき，$g(a)$ を a に関して最小化する：

$$\frac{d}{da}g(a) = a^{p-1} - b = 0 \Longleftrightarrow b = a^{p-1}$$

となり，2 次の導関数を確認すれば，$a = b^{1/(p-1)}$ のとき，最小となる．したがって，

$$g(a) \geq g(b^{1/(p-1)}) = \frac{1}{p}b^{p/(p-1)} + \frac{1}{q}b^q - b^{1/(p-1)}b = \frac{1}{p}b^q + \frac{1}{q}b^q - b^q = 0$$

となる．最後から 2 番目の等号は $p/(p-1) = q$ よりわかる．
　次に，

$$a = \frac{|X|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}}, \qquad b = \frac{|Y|}{(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}},$$

として，(1.3) を用いてば，

$$\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{\mathbb{E}[|Y|^q]} \geq \frac{|XY|}{(\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}}$$

を得る．この両辺の期待値を取れば，定理は証明された． □

例 1.17　　X と Y を確率変数とし，$\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ とする．このとき，$-\infty < \mu_X = \mathbb{E}[X]$, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y] < \infty$ がただちにわかる．さらに，Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]| \leq \mathbb{E}[|(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2\}}\sqrt{\mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2\}}$$

より

$$(\mathbb{COV}[X, Y])^2 \leq \mathbb{VAR}[X]\mathbb{VAR}[Y]$$

を得る．したがって，

$$|\rho[X, Y]| \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$$

を得る．