$\boxed{\text{問題 1}}$ 確率変数 X と Y の同時確率が以下のように与えられているとする．以下の問いに答えよ．

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$

(a) X と Y の周辺確率を求めよ．

(b) $Y = y\,(y = 1,\,2,\,3)$ が与えれたときの X の条件付確率 $f_{X|Y}(x|\,y)$ を求めよ．

(c) $Y = y\,(y = 1,\,2,\,3)$ が与えれたときの X の条件付期待値 $\mathbb{E}[X|\,y]$ を求めよ．

(d) $g(y) = \mathbb{E}[X|\,y]$ とおいたとき，$\mathbb{E}[g(Y)]$ を求めよ．

$\boxed{\text{解答と配点}}$(a) 10 点 (b) 15 点 (c) 10 点 (d) 5 点

(a) X と Y の周辺確率はは

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = x\} &= \mathbb{P}\{X = x,\,Y = 1\} + \mathbb{P}\{X = x,\,Y = 2\} + \mathbb{P}\{X = x,\,Y = 3\} \quad x = 1,\,2,\,3,\\
\mathbb{P}\{Y = y\} &= \mathbb{P}\{X = 1,\,Y = y\} + \mathbb{P}\{X = 2,\,Y = y\} + \mathbb{P}\{X = 3,\,Y = y\} \quad y = 1,\,2,\,3
\end{aligned}$$

であるので，以下のようになる．

$Y \backslash X$	1	2	3	Y の周辺確率
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{7}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{14}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
X の周辺確率	$\frac{7}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{12}{36}$	1

となる．したがって，X と Y の周辺確率は

X	1	2	3	計
確率	$\frac{7}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{12}{36}$	1

Y	1	2	3	計
確率	$\frac{7}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{15}{36}$	1

となる．

(b)

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}(x,\,y)}{f_Y(y)}$$

に注意する．これより

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|\,1) &= \frac{f_{X,Y}(x,\,1)}{f_Y(1)} = \frac{36}{7} f_{X,Y}(x,\,1),\\
f_{X|Y}(x|\,2) &= \frac{f_{X,Y}(x,\,2)}{f_Y(2)} = \frac{36}{14} f_{X,Y}(x,\,2),\\
f_{X|Y}(x|\,3) &= \frac{f_{X,Y}(x,\,3)}{f_Y(3)} = \frac{36}{15} f_{X,Y}(x,\,3),
\end{aligned}$$

より

x	1	2	3	計
$f_{X\vert Y}(x\vert 1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

x	1	2	3	計
$f_{X\vert Y}(x\vert 2)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{3}{14}$	1

x	1	2	3	計
$f_{X\vert Y}(x\vert 3)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

となる．

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|\,1] &= \sum_{x=1}^{3} x f_{X|Y}(x|\,1) = 1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{3}{7} \\
&= \frac{15}{7} \\
\mathbb{E}[X|\,2] &= \sum_{x=1}^{3} x f_{X|Y}(x|\,2) = 1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{10}{14}+3\times\frac{3}{14} \\
&= \frac{30}{14} \\
\mathbb{E}[X|\,3] &= \sum_{x=1}^{3} x f_{X|Y}(x|\,3) = 1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{5}{15}+3\times\frac{6}{15} \\
&= \frac{32}{15}
\end{aligned}
$$

(d)　直接計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(Y)] &= \sum_{y=1}^{3} \mathbb{E}[X|\,y] f_Y(y) \\
&= \frac{15}{7}\times\frac{7}{36}+\frac{30}{14}\times\frac{14}{36}+\frac{32}{15}\times\frac{15}{36} \\
&= \frac{77}{36}
\end{aligned}
$$

となる．また，

$$
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\,Y]] = \mathbb{E}[X] = 1\times\frac{7}{36}+2\times\frac{17}{36}+3\times\frac{12}{36} = \frac{77}{36}
$$

からもかかる．

$\boxed{\text{問題 2}}$　$0<\theta<\infty$ とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に確率密度関数

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & (0<x<\theta), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}
$$

を持つ分布に従うとする．

(a) X_1 の分布関数を求め，そのグラフを描け．

(b) $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とおく．このとき，$X_{(n)}$ の確率密度関数 $f_n(x)$ と分布関数 $F_n(x)$ を求めよ．

(c)

$$F_n(x) \xrightarrow{d} F(x) = \begin{cases} 0 & (x < \theta), \\ 1 & (x \geq \theta) \end{cases}$$

を示せ．ただし，$\xrightarrow{d}$ は分布収束を表すものとする．

(d) $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ とおく．$n \to \infty$ のとき，$X_{(1)}$ はとのような分布に分布収束するかを調べよ..

$\boxed{\text{解答と配点}}$(a) 10 点 (b) 10 点 (c) 5 点 (d) 5 点

(a)　$x \leq 0$ のとき，

$$F_{X_1}(x) = 0$$

$0 < x < \theta$ のとき，

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{x}{\theta}$$

$x \geq \theta$ のとき，

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\theta} f(t)\,dt + \int_{\theta}^{x} f(t)\,dt = 1$$

となるので，

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ \frac{x}{\theta} & (0 < x < \theta), \\ 1 & (x \geq \theta) \end{cases}$$

となる．

(b)　$0 < x < \theta$ に対して，

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}\{X_{(n)} \leq x\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= \Pi_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i \leq x\} \\ &= [F_{X_1}(x)]^n \\ &= \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & (0 < x < \theta), \\ 1 & (x \geq \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$f_n(x) = \frac{d}{dx} F_n(x) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & (0 < x < \theta), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

(c) $F(x)$ は $x = 1$ で不連続なので，$x \neq 1$ の各点で

$$F_n(x) \to F(x)$$

を示せばよい．

$x \le 0$ と $x \ge 1$ のときは自明．$0 < x < 1$ のとき，$|x/\theta| < 1$ なので，$n \to \infty$ のとき，$\left(\frac{x}{\theta}\right)^n \to 0$ となるので，$F_n(x) \to 0 = F(x)$ がわかる．よって，(c) は示された．

(d) $0 < x < \theta$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{X_{(1)} \le x\} \\
&\qquad = 1 - \mathbb{P}\{X_{(1)} > x\} \\
&\qquad = 1 - \mathbb{P}\{X_1 > x,\, X_2 > x,\, \dots,\, X_n > x\} \\
&\qquad = 1 - \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i > x\} \\
&\qquad = 1 - [1 - F_{X_1}(x)]^n \\
&\qquad = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n & (0 < x < \theta), \\ 1 & (x \ge \theta) \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．$x < 0$ のとき，

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} \le x\} \to 0$$

となり，$x > 0$ のとき，

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} \le x\} \to 1$$

となる．したがって，

$$G(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

とおけば，

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} \le x\} \xrightarrow{d} G(x)$$

となることがわかる．

$\boxed{\text{問題 3}}$ $X_1,\, X_2,\, X_3$ は独立な確率変数で同一に標準正規分布 $N(0,\,1)$ に従うとし，

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}X_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}X_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}X_3, \\
Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}X_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}X_3
\end{aligned}$$

とおく．

(a) $\mathbb{E}[Y_2]$ と $\mathbb{VAR}[Y_2]$ を求めよ．さらに，Y_2 の分布は何になるかを答えよ．

(b) $\mathbb{COV}[Y_1,\, Y_2]$ を求めよ．

(c) $Y_1^2 + Y_2^2$ の分布を求めよ．

$\boxed{\text{解答と配点}}$(a) 10 点 (b) 10 点 (c) 10 点

(a) 問題の仮定から $\mathbb{E}[X_i] = 0,\, \mathbb{VAR}[X_i] = 1,\, i = 1,\, 2,\, 3$ となることに注意する．

$$\mathbb{E}[Y_2] = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbb{E}[X_2] + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbb{E}[X_3] = 0$$

となる．また，X_1, X_2, X_3 は独立であるので，

$$\mathbb{VAR}[Y_2] = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_1] + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_2] + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_3] = 1$$

となる．このことと Y_2 は正規分布に従う確率変数の一次結合なので，Y_2 は $N(0, 1)$ に従うことがわかる．

(b) X_1, X_2, X_3 は独立であるので，$\mathbb{COV}[X_1, X_2] = 0$, $\mathbb{COV}[X_1, X_3] = 0$, $\mathbb{COV}[X_2, X_3] = 0$ となることに注意をして，$\mathbb{COV}$ の双線形性を使えば，

$$\begin{aligned}
\mathbb{COV}[Y_1, Y_2] &= \mathbb{COV}\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}X_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}X_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}X_3,\ \frac{1}{\sqrt{6}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}X_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}X_3\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbb{COV}[X_1, X_1] - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbb{COV}[X_2, X_2] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbb{COV}[X_3, X_3] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{18}}\mathbb{VAR}[X_1] - \frac{1}{\sqrt{18}}\mathbb{VAR}[X_2] + \frac{2}{\sqrt{18}}\mathbb{VAR}[X_3] = 0
\end{aligned}$$

となる．さらに，Y_1, Y_2 は正規分布に従うので，Y_1 と Y_2 が無相関ならば，独立となる．

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1] &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{E}[X_1] - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{E}[X_2] + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbb{E}[X_3] = 0, \\
\mathbb{VAR}[Y_1] &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_1] + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_2] + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathbb{VAR}[X_3] = 1
\end{aligned}$$

から Y_1 は $N(0, 1)$ に従う．さらに，(b) に注意すれば，Y_1^2 と Y_2^2 はそれぞれ独立に自由度 1 のカイ自乗分布に従う．さらに，カイ自乗分布の性質から $Y_1^2 + Y_2^2$ は自由度 2 のカイ自乗分布に従うことがわかる．