

情報統計学の演習問題 (その 2)

問題 51 以下を示せ.

(1) Z が標準正規分布に従うとき, $X = Z^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従う.

(2) W が母数 r, λ のガンマ分布に従うとは W が確率密度関数

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} (\lambda w)^{r-1} e^{-\lambda w} & w > 0, \\ 0 & ((\text{その他})) \end{cases}$$

を持つときをいう. ただし, $r > 0, \lambda > 0$ である. W の積率母関数は

$$M_W(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^r, \quad t < \lambda$$

となることを示せ.

(3) X が自由度 p のカイ自乗分布に従うとき, X の積率母関数は

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1 - 2t} \right)^{p/2}, \quad t < \frac{1}{2}$$

となることを示せ.

(4) X_1 と X_2 は互いに独立とし, 各 $X_i, i = 1, 2$ は自由度 p_i カイ自乗分布に従うとき, $X_1 + X_2$ は自由度 $p_1 + p_2$ のカイ自乗分布に従うことを示せ.

問題 52 X と Y は独立にそれぞれ正規分布 $N(\mu, \sigma_X^2)$ と $N(\mu, \sigma_Y^2)$ に従うとき,

$$\text{COV} \left[\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} X + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} Y, X - Y \right] = 0$$

を示せ.

問題 53 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は正規分布 $N(\mu, 1)$ からの標本の大きさ n のランダム標本とする. ただし, $n \geq 2$ とする. 統計量

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

を考える.

(1) $n \geq 3$ のとき, 等式

$$(n-1)S_n^2 = (n-2)S_{n-1}^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)(X_n - \bar{X}_{n-1})^2$$

を示せ. $n = 2$ のときは

$$S_2^2 = \frac{1}{2}(X_2 - X_1)^2$$

を示せ.

(2) $X_1 - X_2$ の分布を求めよ.

(3) $X_1 + X_2$ と $X_1 - X_2$ は独立であることを示せ.

(4) S_2^2 は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ.

(5) $n = k$ のとき, $(k-1)S_k^2$ は自由度 $k-1$ のカイ自乗分布に従い, S_k^2 と $\bar{X}_k$ は独立であると仮定したとき, 以下を示せ. ただし, $k \geq 2$ である.

(5a) $X_{k+1} - \bar{X}_k$ の期待値 $\mathbb{E}[X_{k+1} - \bar{X}_k]$ と分散 $\text{VAR}[X_{k+1} - \bar{X}_k]$ を求めよ.

(5b) $\sqrt{\frac{k}{k+1}}(X_{k+1} - \bar{X}_k)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うことを示せ.

(5c) $\frac{k}{k+1}(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2$ は自由度 1 のカイ自乗分布に従うことを示せ.

(5d) $n = k+1$ のとき,

$$kS_{k+1}^2 = (k-1)S_k^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)(X_{k+1} - \bar{X}_k)^2$$

は自由度 k のカイ自乗分布に従うことを示せ.

(5e) X_{k+1} と $\bar{X}_k$ はそれぞれ独立で正規分布 $N(\mu, 1)$ と $N(\mu, 1/k)$ に従うことに注意して,

$$\text{COV}\left[\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}, \bar{X}_k - X_{k+1}\right] = 0$$

を示めせ. したがって, $\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k - X_{k+1}$ は正規分布に従うので, $\frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$ と $\bar{X}_k - X_{k+1}$ は独立となる. さらに,

$$\bar{X}_{k+1} = \frac{k}{k+1}\bar{X}_k + \frac{1}{k+1}X_{k+1}$$

から S_{k+1}^2 と $\bar{X}_{k+1}$ は独立であることがわかる.