

情報統計学の演習問題(その 1)

問題 51 母集団分布がそれぞれつぎの場合について標本の大きさが n のランダム標本の同時確率密度関数または同時確率関数を書け .

- (1) 母数 p ($0 < p < 1$) のベルヌーイ分布
- (2) 母数 λ ($\lambda > 0$) のポアソン分布
- (3) 区間 (a, b) 上の一様分布 . ただし , $a < b$ である .
- (4) 平均 μ , 分散 σ^2 ($0 < \sigma < \infty$) の正規分布 .
- (5) 母数 λ ($\lambda > 0$) の指数分布

問題 52 平均 μ , 分散 σ^2 ($0 < \sigma < \infty$) の母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本を X_1, X_2, \dots, X_n ($n \geq 4$) とする . つぎの統計量の期待値と分散を求めよ .

- (1) $T_1 = X_1$
- (2) $T_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$
- (3) $T_3 = \sum_{i=1}^n X_i$
- (4) $T_4 = \frac{1}{n} T_3$
- (5) $T_5 = 12$

問題 53 平均 μ , 分散 σ^2 ($0 < \sigma < \infty$) の母集団分布からの標本の大きさが n のランダム標本を X_1, X_2, \dots, X_n とする . 統計量

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

を考える . ただし , $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ は既知の定数とする . 簡単に $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ を T と書くことにする .

- (1) T の平均 $\mathbb{E}[T]$ と分散 $\text{VAR}[T]$ を求めよ .
- (2) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ のとき

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n}$$

を示せ .

- (3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ という条件のもとで T の分散を最小にする a_1, a_2, \dots, a_n を求めよ .

問題 54 X_1, X_2 は区間 $(0, 2)$ 上の一様分布からの標本の大きさが 2 のランダム標本とする . 統計量

$$T_1 = X_1 + X_2, \quad T_2 = X_1 - X_2$$

を考える .

- (1) T_1 の期待値 $\mathbb{E}[T_1]$ と分散 $\text{VAR}[T_1]$ を求めよ .
- (2) T_2 の期待値 $\mathbb{E}[T_2]$ と分散 $\text{VAR}[T_2]$ を求めよ .
- (3) T_1, T_2 の同時確率密度関数を求めよ .
- (4) T_1 の確率密度関数を求めよ .

問題 55

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - X_j)^2$$

を示せ . ただし , $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ である .