情報統計学の演習問題 (その 4)

$\boxed{\text{問題 63}}$　$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし，各 X_n は確率関数

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (x = c + n), \\ 1 - \frac{1}{n} & (x = c), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を持つとする．ただし，c は定数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X_n \xrightarrow{P} c$ を示せ．

(2) 期待値の定義に従い，$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$ を求め，$\mathbb{E}[X_n] \not\to c$ であることを確認せよ..

$\boxed{\text{問題 64}}$　確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，各 Y_n は母数 n のポアソン分布に従うとする．すなわち，

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}, \qquad K = 0, 1, \ldots$$

である．

(1) $\mathbb{E}[X_1] = 1$ を示せ．ただし，$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ を用いてよい．

(2) $\mathbb{E}[X_1(X_1 - 1)] = 1$ を示せ．

(3) $\mathbb{VAR}[X_1] = \mathbb{E}[X_1^2] - \{\mathbb{E}[X_1]\}^2 = 1$ を示せ．

(4) Z_1 と Z_2 が独立に母数 1 のポアソン分布に従うとき，$Z_1 + Z_2$ は母数 2 のポアソン分布に従うことを示せ．

ヒント:$\mathbb{P}(Z_1+Z_2 = k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(Z_1 = \ell, Z_2 = k-\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(Z_1 = \ell)\mathbb{P}(Z_2 = k-\ell)$ となることと二項定理 $2^k = \sum_{\ell=0}^{k} {}_kC_\ell$ を用いる．

(5) $Y_n/n \xrightarrow{P} 1$ を大数の法則を用いて示せ．ヒント：$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ が独立に母数 1 のポアソン分布に従うとき，上の問いの結果から $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ が母数 n のポアソン分布に従うことを利用する．

(6) 中心極限定理を用いて，

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

を示せ．

$\boxed{\text{問題 65}}$　$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ，分散 σ^2 の分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし，

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell - \bar{X}_n)^2$$

とする．ただし，$\sigma > 0$ とする．

(1) 各 $X_\ell\,(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ の分布が正規分布のとき，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

は $N(0, 1)$ に従うことを示せ．

(2) 中心極限定理を用いて，

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

を示せ．

注意：各 $X_\ell\,(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ の分布が必ずしも正規分布でなくともよい．

(3)

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{S_n^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

を示せ．ただし，$S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ は用いてよい．

$\boxed{\text{問題 66}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を平均 μ，分散 σ^2 の分布からの標本の大きさが n のランダム標本とし，

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell,$$

とする．ただし，$\sigma > 0$ である．

(1) $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$ と $\mathbb{VAR}[\bar{X}_n]$ を求めよ．

(2) つぎの不等式をみたすために，n をいくつ以上にすればよいかをチェビシェフの不等式を用いて調べよ．

$$(*) \qquad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{2}) \geq 0.99$$

ヒント：確率変数 Y の分散が存在（$\mathbb{VAR}[Y] = \tau^2\,(\tau > 0)$）するならば，任意の正の数 a に対して、

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| < a\tau) \leq \frac{1}{a^2}, \qquad \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| < a\tau) \geq 1 - \frac{1}{a^2},$$

(3) 不等式 $(*)$ みたすために，n をいくつ以上にすればよいかを中心極限定理を用いて調べよ．ただし，Z が標準正規分布に従うとき，$\mathbb{P}(|Z| \leq 2.575) = 0.99$ を用いてよい．また，自然数 a に対して，$[a]$ を a を超えない最大の整数とする．